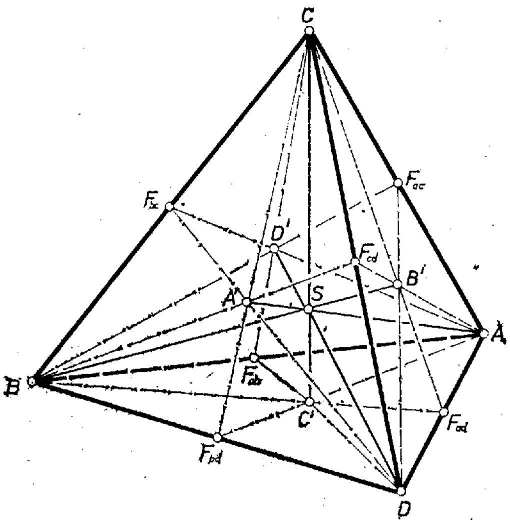
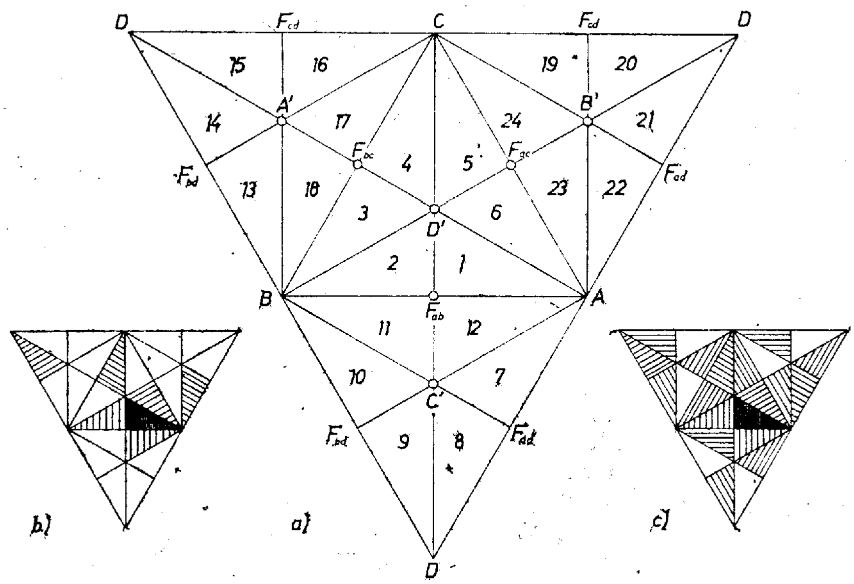
I. megoldás. Az idézett gyakorlatban láttuk, hogy a mostani 6 feldaraboló sík rendre azonos a szabályos tetraéder 6 szimmetriasíkjával, továbbá hogy a keletkező 24 rész úgy osztható két, egyenként 12–12 részt tartalmazó halmazba, hogy az ugyanazon halmazbeli részek egymásba átvihetők alkalmas elfordítással, a két halmazból választott 1–1 rész pedig vagy a tetraéder valamelyik szimmetriasíkján való tükrözéssel, vagy ezentúl még alkalmas elmozdítással vihető át egymásba (ami – tegyük hozzá – meg is előzheti a tükrözést és követheti is azt).

Megmutatjuk, hogy feladatunk kérdésére igenlő a válasz. Legyenek a tetraéder csúcsai A, B, C, D, vetületük a szemben levő lapon rendre A', B', C', D', ez egyszersmind az illető szabályos háromszög-lap középpontja, 3 szimmetriatengelyének közös pontja; legyen továbbá az XY él felezőpontja – ahol X és Y a tetraéder két tetszés szerinti, egymástól különböző csúcsát jelöli – F_{xy}.



1. ábra

A 24 rész mindegyike tetraéder – ezt is láttuk az idézett gyakorlatban –, egyik csúcsa mindegyiküknek S, az adott tetraéder súlypontja, egy-egy további csúcsuk rendre A, B, C és D közül, ill. A', B', C' és D' közül, ill. az F_{xy} felezőpontok közül való. Így minden egyes rész meghatározására elég utóbbi három típusú csúcsát megadni, más szóval az eredeti tetraéder valamelyik lapjába eső lapját, pl. az $SAD'F_{ab}$ tetraéderből az $AD'F_{ab}$ lapot. A kérdéses tükrözések ezeket a lapokat egymásba tiszik át, ezért elég a lapok átmeneteit tekintenünk.



2. ábra

Erre a célra az 1. ábrán bemutatott, felosztott tetraéder papírmodelljének a 2. a) ábrán azt a kiterítését mutatjuk be, amely a DA, DB, DC élek fölvágásával adódik, és ránézésben – a szokásos hálózatokkal ellentétben – a lapok belsejét látjuk. A részháromszögeket egyszerűség kedvéért az 1, 2, …, 24 számokkal is megjelöltük, éspedig úgy, hogy a páratlan jelzőszámúak tartoznak az egyik mondott halmaz tetraédereihez (pozitív körüljárással az egymás utáni csúcsoknál levő szög 30°, 60°, 90°) – ezek a rajzsíkban való mozgatással átvihetők egymásba – a páros jelzőszámúak pedig a másik halmazhoz tartoznak, a szögek növekvő rendjében körüljárva őket, körüljárásuk negatív. Azt mutatjuk meg, hogy az 1-es jelű $AD'F_{ab}$ háromszög a tetraédernek legföljebb 3 szimmetriasíkján való tükrözésével a 2, 3, ..., 24 jelű háromszögek bármelyikébe átvihető.

Az 1-es háromszög a DD' forgástengelyen átmenő DAF_{bc}, DBF_{ac}, DCF_{ab} szimmetriasíkokon való tükrözéssel rendre a 6, 4, 2 jelű háromszögekbe megy át. Továbbmenve, az ABF_{cd} síkon tükrözve a 12 jelzésűbe, mert így a C, D és a C', D' pontpárok fölcserélődnek, A és F_{ab} viszont helyben maradnak; végül hasonló meggondolással a BCF_{ad} és CAF_{bd} síkon való tükrözéssel a 14, ill. 22 jelű háromszögbe jutunk. A 6 szimmetriasíknak megfelelően 6 db páros jelzőszámú (negatív körüljárású) háromszögbe jutottunk el a 12 közül, éspedig az 1-est tartalmazó (az ABC) lapnak mind a három ilyen háromszögébe és az $ABCD$ tetraéder további három lapjának egy-egy ilyen háromszögébe (2. b) ábra vonalkázott háromszögei).

Ebből tüstént adódik, hogy egy második tükrözéssel mind a 11 további páratlan jelzőszámú háromszögbe átvihetjük az 1-es háromszöget, és e második tükrözésben elég azokra a szimmetriasíkokra szorítkoznunk, amelyek merőlegesek $ABCD$-nek arra a lapjára, amelyre az első tükrözéssel jutottunk (2. c) ábrának a hosszabb befogóval párhuzamos vonalkázású háromszögei).

Végül egy harmadik tükrözéssel és ugyanezzel a korlátozással a DAB, DBC, DCA lapok hátra levő 2–2 páros jelzőszámú háromszögébe juttathatjuk 1-et. Ezzel az állítást lényegében bebizonyítottuk.

Ha mármost a tetraédernek előre kiszemelt 24-edrésze az 1-es háromszög szöghöz tartozó $SAD'F_{ab}$ résztetraéder, akkor bármelyik másikból úgy juthatunk át ebbe, hogy a fentiek szerint kiválasztható legföljebb 3 tükrözést fordított sorrendben hajtjuk végre. Pl. a 16-os háromszögbe a fenti első tükrözéssel elért 14-esből pl. a 15-ösön át az ADF_{bc}, majd ABF_{cd} síkon való tükrözéssel juthatunk át, ezért a 16-osból az 1-esbe egymás után az ABF_{cd}, ADF_{bc}, BCF_{ad} síkokon való tükrözés visz át.

Megjegyzés. Azt is látjuk, hogy két tükrözés eredménye ugyanolyan körüljárású háromszög, vagyis a kezdeti és a végző résztest egymásba elmozdítással, elfordítással is átvihető, tehát két tükrözés eredménye a térben is forgatás, a tengely mindig átmegy S-en, a két szimmetriasík metszésvonala.

II. megoldás. A fentiekre támaszkodva konkrét példán mutatjuk be a célnak megfelelő tükörsíkok egymásutánjának egy lehetséges megválasztását. Ismét a fenti 16-os $CA'F_{cd}S$ résztetraédert visszük át az 1-es jelzőszámú $AD'F_{ab}S$-be, az első tükrözést úgy választva, hogy a 16-osnak az eredeti tetraéderrel közös C csúcsa jusson A-ba. A, C csere csak a BDF_{ac} síkon valósul meg, ekkor minden B és D betű a helyén marad, tehát a $CA'F_{cd}$ háromszög az $AC'F_{ad}$-be, a 7-esbe megy át. – Amennyiben egy más példában a kiindulási és a célbeli résztestnek az eredeti tetraéderről származó csúcsa közös, a most mutatott lépés természetesen elmarad.

A kapott 7-es résztestet úgy tükrözzük tovább, hogy a tetraéder lapközéppont jellegű csúcsa a kívánt helyre jusson, vagyis C' a D'-be. Ezek akkor és csak akkor cserélnek, ha C és D cserél, más szóval ha A és B helyben marad vagyis az ABF_{cd} síkon való tükrözéssel; ez pedig a 7-est $AD'F_{ac}$-be, a 6-os résztestbe viszi át. – Amennyiben a „vesszős" pont már az első tükrözés után a kívánt helyen lett volna, akkor a 2. tükrözés természetesen elmarad. Egyébként ez a megegyezés már az 1. tükrözés előtt mutatkozott volna, mert a lapközéppontban álló vesszős betű különbözik a lap csúcsain álló 3 betű mindegyikétől, vagyis a lap mindegyik élén álló betűpártól, tehát fordítva, két tetraédercsúcsot egymással fölcserélő tükrözés az illető résztesthez tartozó, vesszőzött betűt nem változtatja meg. Ez a meggondolás azt is adja, hogy a 2. tükrözés sohasem mozdíthatja el az 1. tükrözéssel helyére állított tetraédercsúcsot.

Végül – ha szükséges – az élközéppontot visszük a kívánt helyre, esetünkben F_{ac}-t F_{ab}-be; ehhez B, C csere – és A, D helybenmaradás – szükséges, a megfelelő tükörsík ADF_{bc}. (Megjegyezzük, hogy az élközéppont egyik indexe minden esetben már az 1. tükrözéssel helyessé válik.)

Kezdhettük volna eljárásunkat a „vesszős" pont helyrevitelével is: A, D cserélnek, B, C maradnak: a BCF_{ad} síkon tükrözve az 5-ös jelzőszámú $CD'F_{ca}$ résztestbe jutunk. Sőt ekkor már F_{ca}-nak a kívánt F_{ab}-be való átvitelével is folytathatjuk eljárásunkat; megindulásul viszont nem lehetett volna F_{cd}-t F_{ab}-be átvinni, mert ehhez minden betűnek cserélnie kellett volna, holott bármelyik tükrözés a benne felhasznált él végpontjait változatlanul hagyja.

Ezekből és az I. megoldásban látott tükrözéssorozatból látjuk, hogy több megfelelő sorozat is lehetséges 3-nál nem több tükrözésből.

Móri Tamás (Budapest, Berzsenyi D. Gimn. II. o. t.)
Oláh Vera (Budapest, Berzsenyi D. Gimn. I. o. t.)