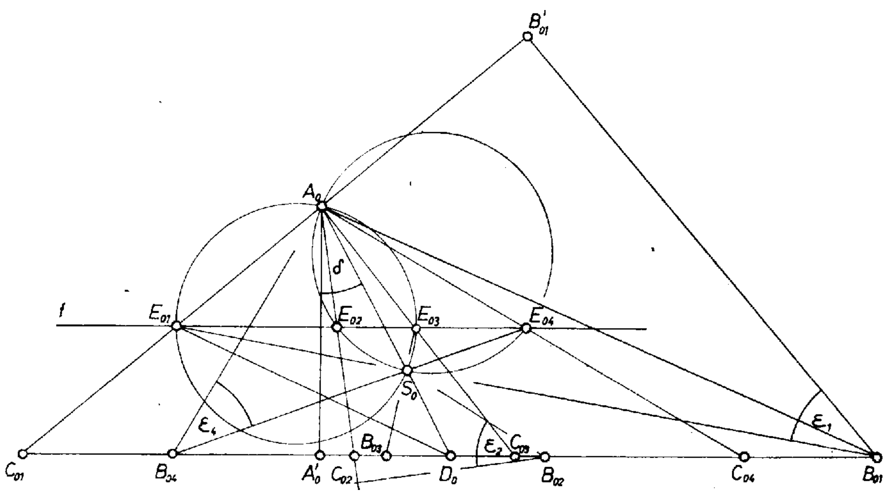
I. megoldás. Jelöljük a keresett háromszög csúcsait A, B, C betűkkel úgy, hogy ha még az A-ból induló magasságvonal talppontja a BC oldalegyenesen A', a BC oldal felezőpontja D, akkor az $A'AD$ szög egyenlő az első adott δ szöggel, továbbá hasonlóan a $B'BE$ szög egyenlő a másik adott szöggel, ε-nal, végül a háromszög M magasságpontjának és S súlypontjának távolsága egyenlő az adott g hosszúsággal.

Az egyetlen lineáris adatot, g-t egyelőre figyelmen kívül hagyva δ-ból és ε-ból az alábbiak szerint a keresetthez hasonló $A_0B_0C_0$ háromszöget szerkesztünk, végül ezt úgy nagyítjuk (kicsinyítjük), hogy a benne adódó M_0S_0 távolság megfelelője g legyen. – Az adott szögek természetesen hegyesszögek, vagy értékük 0; az utóbbi lehetőségre majd csak a δ, $\varepsilon > 0$ eset lezárása után térünk rá.

Az A_0A_0' magasság megválasztása után a δ hegyesszöggel szerkesztett $A_0D_0A_0'$ derékszögű háromszögből indulunk ki és kijelöljük ennek A_0D_0 átfogóján a harmadoló S_0 súlypontot ($A_0S_0 = 2S_0D_0$). Ekkor az A_0S_0 szakasz látószöge az A_0C_0 oldal E_0 felezőpontjából vagy az adott ε-nak a pótszöge, $90° - \varepsilon$–ti. az olyan háromszögekben, amelyekben a B_0' magasságtalppont az E_0A_0 félegyenesen van, más szóval: ha $B_0A_0 < B_0C_0$ –, vagy e pótszög kiegészítő szöge, $90° + \varepsilon$, ha ti. $B_0A_0 > B_0C_0$. Ezek szerint E_0 mértani helye annak a két teljes körnek a kerülete, amelyeknek pontjaiból az A_0S_0 szakasz $90° - \varepsilon$ vagy $90° + \varepsilon$ szögben látható – természetesen A_0-t és S_0-t kivéve (1. ábra).



1. ábra

E_0 másik mértani helye pedig nyilvánvalóan az A_0A_0' magasságszakasz f felező merőlegese. A két mértani helynek 4 közös pontja van, mert A_0 és S_0 az f-nek két különböző partján van, és így f mindegyik kört 2 különböző pontban metszi és a 4 metszéspont is különböző, mert a két körnek csak A_0 és S_0 közös pontjai.

A 4 metszéspont bármelyikét véve E_0 szerepére, B_0-t az E_0S_0 egyenes, C_0-t pedig az E_0A_0 egyenes metszi ki az $A_0'D_0 = a_0$ egyenesből. Mindegyik így kapott háromszög megfelel a követelményeknek, mert E_0 felezi A_0C_0-t, hiszen $a_0 \parallel f$, másrészt S_0 harmadolja E_0B_0-t, mert S_0-nak a_0-tól való távolsága $A_0A_0'/3$, tehát f_0-tól való távolsága $A_0A_0'/2 - A_0A_0'/3 = A_0A_0'/6$, fele amannak; továbbá az $E_0B_0 = E_0S_0$ egyenes az A_0C_0 egyenessel $90° - \varepsilon$ és $90° + \varepsilon$ szögeket zár be és így A_0C_0 felező merőlegeséhez ε szöggel hajlik, tehát a vele párhuzamos B_0B_0'-höz is. Csak azt kell még belátnunk, hogy A_0D_0 valóban súlyvonal, vagyis hogy a külön-külön kapott B_0 és C_0 a D_0-ra tükrös pontpár. Ez abból adódik, hogy $S_0E_0 : S_0B_0 = S_0D_0 : S_0A_0 = 1 : 2$ alapján $A_0B_0 \parallel E_0D_0$, így pedig $B_0C_0 : B_0D_0 = A_0C_0 : A_0E_0 = 2 : 1$.

Akkor is érvényes meggondolásunk, ha az adott szögek egyike, mondjuk $\delta = 0°$; ekkor a háromszög nyilvánvalóan egyenlő szárú, $A_0B_0 = A_0C_0$, és a_0-ként az A_0'-ben A_0A_0'-re állított merőleges veendő. Mivel ekkor a két kör egymás tükörképe A_0A_0'-re, a 4 megoldás is páronként egymás képe, tehát csak 2 különböző háromszöget kapunk. (Ha pedig az $\varepsilon > 0°$ szögből indulunk ki, akkor ($\delta = 0°$ miatt a két kör egybeesik, Thalész-körré válik.)

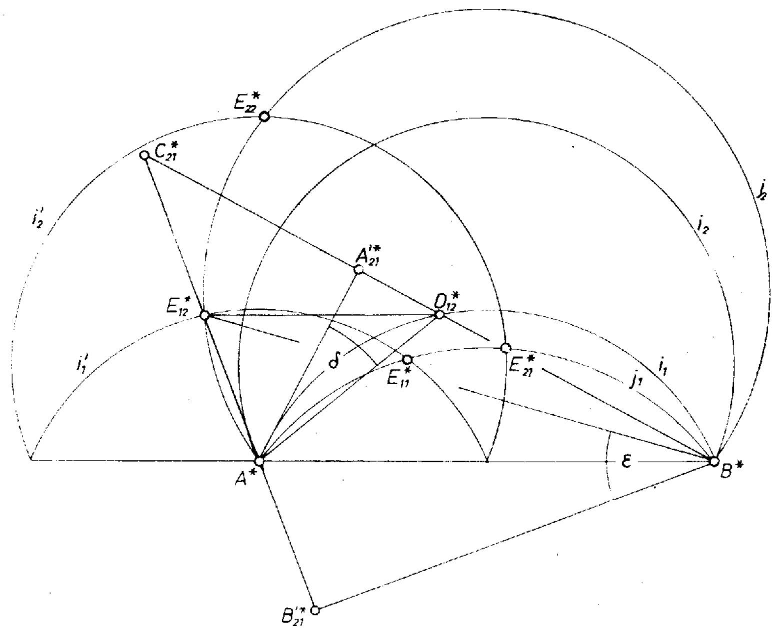
Ha végül $\delta = \varepsilon = 0°$, akkor ezzel a háromszögnek 2 különböző szimmetriatengelyéről tudunk, tehát a háromszög szabályos. Ilyenkor nyilvánvalóan csak $g = 0$ esetén van megoldás, és minden szabályos háromszög megfelel.

Könnyű belátni, hogy ha $\delta = \varepsilon > 0$, akkor az egyik látókör középpontja A_0A_0'-n van, azonban az ábra mégsem szimmetrikus, megvan mind a 4 megoldás, közülük 2 egyenlő szárú.

Az előrebocsátott nagyításról csak azt kell megjegyezni, hogy a szerkeszthetőség feltétele ez: $g = 0$ akkor és csak akkor álljon fenn, ha $\delta = \varepsilon = 0$. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Móri Tamás (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Az I. megoldásban mondott, a keresetthez hasonló $A^*B^*C^*$ háromszög szerkesztését kezdhetjük az A^*B^* oldal tetszés szerinti fölvételével is, valamint az ezáltal létrejött félsíkok közül annak a megválasztásával, amelyiken C^*-ot szerkeszteni kívánjuk (2. ábra).



2. ábra

A fentiekhez hasonlóan A^*B^*-nak E^*-ból vett látószöge $90° - \varepsilon$ vagy $90° + \varepsilon$, és ugyanúgy D^*-ból $90° - \delta$ vagy $90° + \delta$, ezek $2 - 2$ körívet adnak mértani helyül a választott félsíkon: D^* számára az i_1, i_2 párat, E^* számára j_1, j_2 párat.

És mivel még D^*E^* a háromszögnek A^*B^*-gal párhuzamos középvonala, tehát $\overrightarrow{D^*E^*} = \overrightarrow{B^*A^*}/2$, azért E^*-nak az i_1, i_2-ből $\overrightarrow{A^*B^*}/2$-vel való eltolásával előálló i'_1, i'_2 ívpáron is rajta kell lennie, így E^* szóba jövő helyzetei az i'_1, i'_2 ívpár közös pontjai j_1, j_2-vel. Tovább az I. megoldás szerint haladhatunk.

A feladat kitűzőjének megoldásvázlata alapján