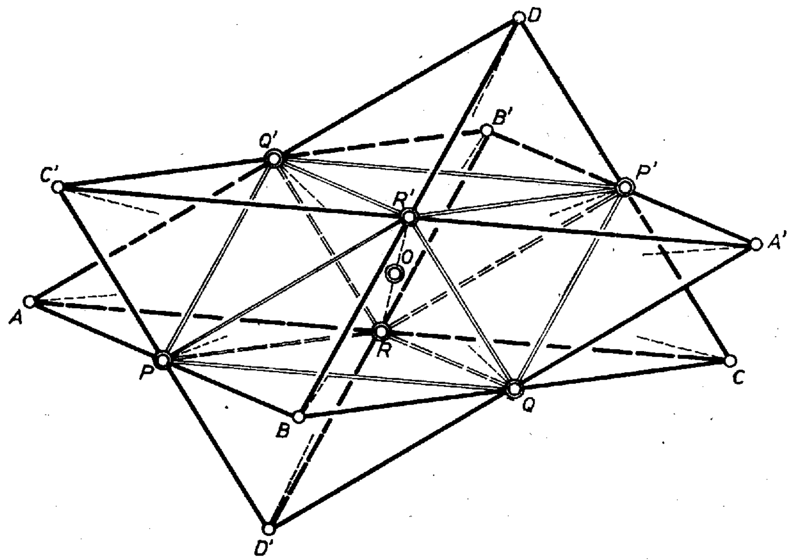
Először azt mutatjuk meg, hogy bármely valódi $OPQR = G_0$ háromoldalú gúlához – vagyis ha O, P, Q, R különböző pontok, nincsenek egy síkban (nincs közülük három egy egyenesen) –, megadható olyan $ABCD$ valódi háromoldalú gúla – más néven négylapú test, tetraéder –, melynek 6 élét a P, Q, R és P', Q', R' pontok felezik.

Válasszuk ki a kívánt tetraéder ABC lapját határoló élek felezőpontjai céljára a 3 tükrös pontpár (ti. P és P', Q és Q', R és R') egyik-egyik tagját, pl. a P, Q, R ponthármast. Húzzunk párhuzamost a PQR háromszög mindegyik csúcsán át a szemben fekvő oldallal, és legyenek ezek páronkénti metszéspontjai A, B és C úgy, hogy a $PQRA$, $QRPB$ és $RPQC$ négyszögek paralelogrammák. Ekkor ABC valódi háromszög, ennek AB, BC, CA oldalát rendre P, Q, R felezi, hiszen pl. $AP = RQ = PB$, és más ilyen háromszög nincs.

Vegyük most az ABD lap céljára az ABR' síkot. Ez átmegy Q'-n is, hiszen AB párhuzamos és egyező irányítású RQ-val és 2-szer akkora, így a tükrözésre tekintettel $Q'R'$-vel is párhuzamos, egyező irányítású és 2-szer akkora. Eszerint A, B, R', Q', egy konvex trapéz egymás utáni csúcsai. A BR', AQ' szárak meghosszabbításai metszik egymást egy D pontban. D-t az $R'Q'$ egyenes elválasztja AB-től, és az ABD, $Q'R'D$ hasonló háromszögekből $DA : DQ' = DB : DR' = AB : Q'R' = 2 : 1$, tehát $DA = 2 \cdot DQ'$, $DB = 2 \cdot DR'$.

Ugyanígy BC párhuzamos és egyező irányítású PR-rel és $R'P'$-vel és 2-szerese ezeknek, így P' benne van a BCR' síkban, és BR'-nek és CP'-nek D^* metszéspontjára $D^*B = 2 \cdot D^*R'$, és D^* az $R'P'$-nek BC-t nem tartalmazó partján van, ennélfogva azonos D-vel; továbbá $DC = 2 \cdot DP'$.



Mindezek szerint P', Q', R' felezi rendre a DC, DA, DB szakaszt. És mivel D nincs benne az ABC síkban, hiszen tőle 2-szer akkora távolságban van, mint pl. Q', ez viszont ismét 2-szer annyira, mint O, ami pedig a föltevés szerint nincs benne az $ABC = PQR$ síkban, azért a kapott $ABCD = G$ egy a feladat követelményeinek megfelelő, valódi tetraéder. Úgy is mondhatjuk a távolságarányokat, hogy G-nek D-ből húzott, az ABC lap síkjára merőleges magassága 4-szer akkora, mint G_0-nak O-ból induló magassága. S mivel a D-vel szemben fekvő ABC alapháromszög területe is 4-szer akkora, mint az O-val szemben fekvő PQR háromszögé, hiszen az ABC háromszöget PQ, QR és RS 4 egybevágó háromszögre bontják, azért G térfogata 16-szor akkora, mint G_0 térfogata.

Máshogyan nem határozhatjuk meg a fenti ABC laphoz a keresett tetraéder D csúcsát, mert az ABP' sík nem alkalmas az ABD lap céljára, hiszen csak 2-t tartalmaz az előírt élfelező pontok közül.

Ugyanerre a G-re jutunk akkor is, ha fenti eljárásunkat ismételve a PQR háromszög helyett a $PQ'R'$, vagy $QR'P'$, vagy az $RP'Q'$ háromszögből indulunk ki, hiszen e 4 háromszög a G-ben ekvivalens szerepet játszik, mindegyik a G egyik lapháromszögének a középháromszöge.

Akkor viszont más tetraédert kapunk, ha a kiindulási háromszögünk csúcsai a 3 „vesszős" pont (P', Q', R'), vagy az egyik tükrös pontpárból a vesszős, a további két párból a vesszőtlen pont, pl. P, Q, R'. Mivel azonban az új gúla mindegyik esetben G-nek O-ra való $A'B'C'D' = G'$ tükörképe, hiszen a most mondott 4 háromszög mindegyike a föntebbi 4 háromszög valamelyikének O-ra való tükörképe, azért G' térfogata is 16-szorosa G_0 térfogatának.

G és G'-n túl nincs további megfelelő tetraéder, mert P, Q, R, P', Q' és R' közül már csak úgy lehetne 3 pontot választani, hogy közülük kettő egymás képe legyen O-ra, ilyen 3-asból pedig eljárásunkkal nem adódik tetraéder, hiszen pl. a P, P', Q pontok síkjában O, és így Q' is benne van. – Ezzel vizsgálatunkat befejeztük.

Móri Tamás (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., II. o. t.)
2 dolgozata alapján, kiegészítésekkel

Megjegyzés. A fenti 2 dolgozathoz fűzött megjegyzések említik a két gúla létezését és szimmetrikus voltát, másrészt tovább ezt olvassuk: „Nem mutattuk ki az $ABCD$ tetraéder létezését ..., de ezt a feladat nem is írja elő."

Az idézettel szemben a szerkesztőség a pontversenykiírást idézi: „mindig gondolják meg a versenyzők, létezik-e, lehetséges-e az mindig – ill. mely feltételek mellett –, amiről beszélnek." A meggondolást kétes esetekben természetesen le is kell írni, ha a feladat nem is kérdezi. Pórázon vezetné a szerkesztőség a versenyzőket, ha maga mondana ki előre minden a megoldás során esetleg föllépő részletkérdést – itt éppen a létezés vagy nem létezés, az egyértelműség fontos, gyakran fellépő kérdéseit –, amin a versenyző bemutathatná éleslátását, körültekintését.

Megjegyezzük másrészt, hogy pl. egy gép részére szerkesztett számítási programban el kell várni a programozótól, hogy minden eshetőségre adjon utasítást a gépek. A mostani feladatunkhoz hasonló bizonyítást azonban egyelőre nem végeznek a gépek.

Egy másik dolgozat – némi helyes meglátással, de a sajnálatosan gyakori elnagyolással – így ír: „Hasonló módszerrel még több ilyen tetraédert szerkeszthetünk.” Ez viszont – mint láttuk – már sok, csak kettő van.