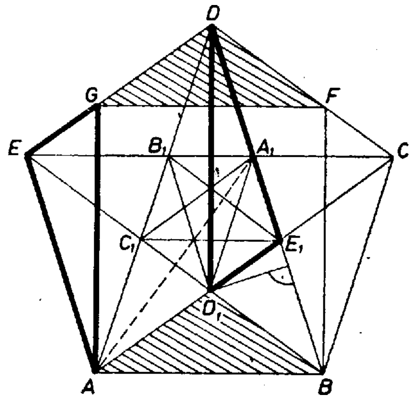
Előkészítő megjegyzés az összes alábbi megoldásokhoz. Rajzoljuk meg az adott szabályos ötszög átlóit, ezek rendre párhuzamosak az ötszög egy-egy megfelelő oldalával, és egy újabb (konvex) szabályos ötszöget fognak közre, $A_1B_1C_1D_1E_1$-et (a betűzést úgy választjuk, hogy az AA_1, BB_1 stb. egyenesek e két ötszög közös szimmetriatengelyei legyenek). A GFD háromszög egybevágó az ABD_1 háromszöggel, hiszen e két egyenlő szárú háromszög alapjai párhuzamosak és egyenlők, megfelelő száraik pedig párhuzamosak. Ugyancsak egybevágók az AEG és DE_1D_1 háromszögek, hiszen megfelelő oldalaik párhuzamosak, és mivel AD_1DG paralelogramma, azért $AG = DD_1$. Alábbi megoldásainkban azt fogjuk belátni, hogy az ABD_1 és DE_1D_1 háromszögek területe egyenlő.



I. megoldás. Az ABA_1E négyszög rombusz, hiszen szemközti oldalai párhuzamosak és $AB = AE$. Emiatt A-t BE-re tükrözve A_1 et kapjuk, és ABD_1, egybevágó A_1BD_1-gyel. Ez utóbbinak és a DE_1D_1 háromszögnek közös része az $A_1D_1E_1$ háromszög, az utóbbiból visszamaradó A_1DD_1 háromszög egyenlő területű az A_1B_1D háromszöggel. Valóban, ahogy A-t BE-re tükrözve A_1-et kapjuk, ugyanúgy D-t a CE-re való tükrözés D_1-be viszi, tehát $A_1DB_1D_1$ rombusz, melyet az A_1B_1, DD_1 átlók négy egybevágó derékszögű háromszögre vágnak szét, a mondott A_1DD_1 és A_1B_1D háromszög ezek közül kettő-kettő egyesítésével állítható elő. Az A_1B_1D háromszög pedig egybevágó az A_1BD_1 háromszögből visszamaradó BD_1E_1 háromszöggel, állításunkat tehát bebizonyítottuk.

Bizonyításunk során tulajdonképpen többet mutattunk meg, ti. azt, hogy a két háromszög egymásba átdarabolható: ha a DE_1D_1 háromszöget az A_1D_1, A_1B_1 egyenesekkel három részre vágjuk, a keletkező három részből összeállítható az A_1BD_1 háromszög.

II. megoldás. Az A_1BD_1, DE_1D_1 háromszögek D_1 csúcsa és ezzel szemközti oldaluk egyenese közös, tehát a D_1 csúcshoz tartozó magasságuk egyenlő. Egyenlő a D_1-gyel szemközti oldaluk is, hiszen e két szakaszt a CC_1, tengelyre való tükrözés egymásba viszi át, – e két háromszög területe tehát egyenlő.

Megjegyzés. Lényegében ugyanezt használja fel a következő megoldás. A DE_1D_1 háromszög területe nem változik meg, ha D_1 csúcsát a DE_1 alappal párhuzamosan B_1-be toljuk. A kapott DE_1B_1 háromszög egybevágó a BA_1D_1 háromszöggel, hiszen e háromszögek a CC_1 tengelyre tükrözve egymásba mennek át.

III. megoldás. A BD_1E_1, BD_1C háromszögek hasonlók, hiszen egyenlő szárúak, és az alapjukon fekvő egyik szögük közös. ($BC = D_1C$, mert mindkettő egyenlő B_1C-vel.) Emiatt

$$\frac{BD_1}{D_1E_1} = \frac{CB}{BD_1} = \lambda. \tag{1}$$

A DE_1D_1 háromszöghöz hozzávéve a nála ugyancsak λ-szor nagyobb területű DD_1A háromszöget (ugyanis e háromszögek területének hányadosa megegyezik a közös D csúcsukkal szemben fekvő alapjuk

$$\frac{AD_1}{D_1E_1} = \frac{BD_1}{D_1E_1} = \lambda$$

hányadosával), az egyenlő szárú AE_1D háromszöget kapjuk. Az ABD_1 háromszöghöz hozzávéve a nála λ-szor nagyobb területű D_1BC háromszöget (mert e háromszögek területének hányadosa megegyezik alapjuk

$$\frac{CD_1}{AD_1} = \frac{CB}{BD_1} = \lambda$$

hányadosával), az egyenlő szárú ABC háromszöget kapjuk. ABC és AE_1D egybevágók, mert alapjaik egyenlők: $AC = AD$, és egyenlők az alapon levő szögeik is: $BCA\sphericalangle = CAD\sphericalangle$. A DE_1D_1, ABD_1 háromszögek területeinek $(1+\lambda)$-szorosa tehát egyenlő, így területeik is egyenlők.

IV. megoldás. A DE_1D_1 háromszög DD_1 oldalához tartozó magassága a C_1E_1 szakasz fele, és $C_1E_1 = A_1D_1 = BD_1$. Megmutatjuk, hogy a DD_1 oldal kétszer akkora, mint az ABD_1 háromszög BD_1 oldalához tartozó magassága, ezzel belátjuk, hogy DE_1D_1 és ABD_1 területe egyenlő. Valóban, ABD_1 egybevágó A_1CD-vel és ennek A_1D oldalához tartozó magassága fele DD_1-nek.

V. megoldás. A DD_1E_1 háromszög területe

$$\frac{1}{2}DE_1 \cdot E_1D_1 \sin 108^\circ,$$

hiszen e háromszög E_1-nél levő szöge egyenlő a szabályos ötszög csúcsainál levő szöggel. ABD_1 területe pedig

$$\frac{1}{2}AD_1 \cdot D_1B \sin 108^\circ,$$

E két kifejezés egyenlősége következik (1)-ből, hiszen

$$AD_1 = D_1B \quad \text{és} \quad BC = DE_1.$$