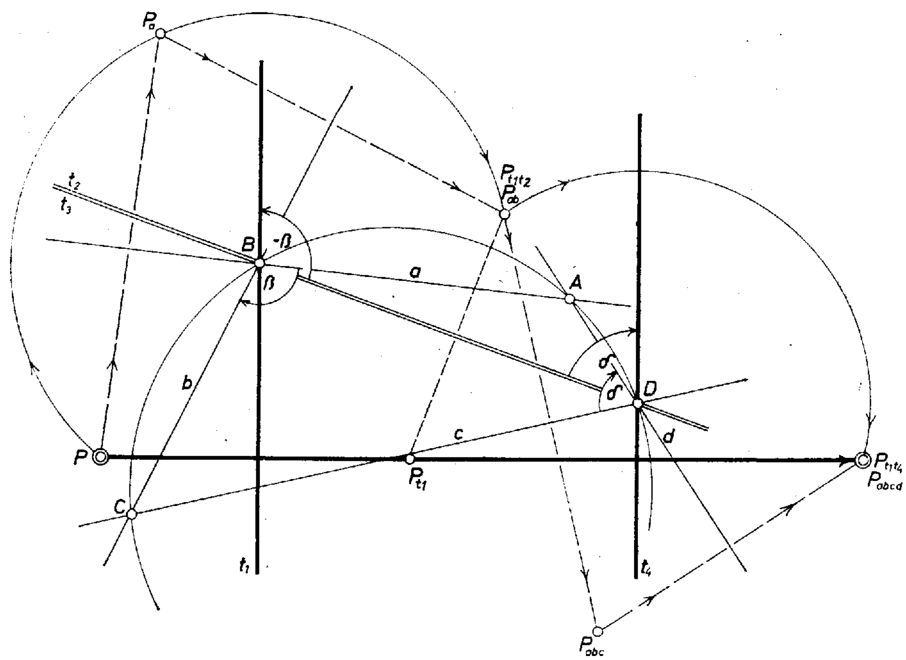
Föltehetjük, hogy az ABC háromszög pozitív körüljárású – hiszen az ellentétes esetben vehetnénk a kör és a pontok tengelyes tükörképét a sík valamely egyenesére (pl. a kör A-ból induló átmérőjére), az állítást igazolnánk a tükörképre, amely így már pozitív körüljárású, akkor pedig a visszatükrözéssel visszaadódó eredeti alakzatra is érvényes az állítás.

Ismeretes a tankönyvből, hogy a sík bármely alakzatát előbb az AB, majd a BC egyenesre mint tengelyre tükrözve, eredményül ugyanazt a helyzetét kapjuk az alakzatnak, mint ha azt elforgatjuk a B pont körül negatív irányban 2β szöggel, ahol β az ABC háromszög B-nél levő – azaz $180°$-nál kisebb - szöge, amely a BA-t BC-be átvivő forgás szöge.

Hasonlóan a CD és DA egyeneseken – ebben a sorrendben – végrehajtott tükrözés eredménye egyezik annak az elfordításnak az eredményével, melynek centruma D, szöge 2δ – ahol δ a CDA háromszög D-nél levő szöge, és iránya megegyezik a DC szakaszt $180°$-nál kisebb szöggel a DA-ra vivő elfordulás irányával. Ezek szerint e két elfordítás sorrend szerinti eredményéről kell kimutatnunk, hogy elérhető az eredeti alakzat egyetlen eltolásával.

A bizonyítást két esetben végezzük a D pontnak az AC egyeneshez képest elfoglalt helyzete szerint. Ha D a B-t nem tartalmazó partján van az AC egyenesnek (1. ábra) – más szóval ha $ABCD$ konvex négyszög –, akkor a húrnégyszög tulajdonságai alapján $\delta = 180° - \beta$, a CDA háromszög is pozitív körüljárású, így a síkot előbb 2β, majd 2δ szöggel fordítjuk el negatív irányban, együttvéve $2(\beta+\delta) = 360°$ szöggel, tehát minden irány visszajut önmagába. (Az irányok szempontjából nem lényeges, hogy a két elfordítás centruma nem ugyanaz.)



1. ábra

Ha viszont D ugyanazon a partján van az AC egyenesnek, mint B – azaz $ABCD$ hurkolt húrnégyszög, akkor abszolút értékben $\delta = \beta$, viszont a DC-t DA-ba vivő ($180°$-nál kisebb) elfordítás ellentétes irányú a BA-t BC-be vivő elfordítással (hiszen egyenlő irányú a BC-t BA-ba vivő elfordítással). Így a B és D körüli elfordítás egyező nagyságú, de ellentétes irányú, tehát egymás utáni végrehajtásukkal ismét azt kapjuk, hogy a sík minden iránya visszajut önmagába. Így a két elfordítás eredménye valóban csak eltolás lehet, az állítást bebizonyítottuk.

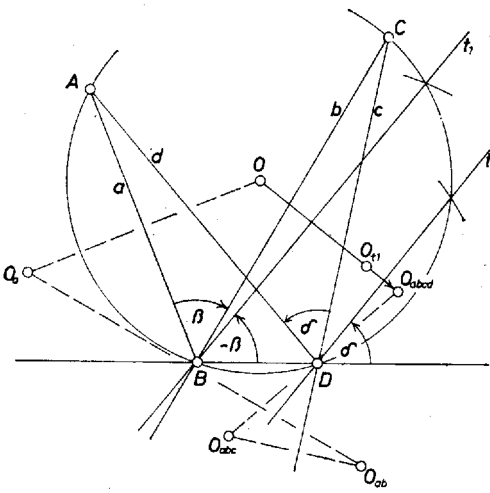
Vermes András (Eger, Gárdonyi G. Gimn.)

Megjegyzés. Könnyű megadni a kérdéses eltolás nagyságát és irányát is. Az alkalmazott tétel megfordításaként az is ismeretes a tankönyvből, hogy a sík egy E centrumú, ε szögű elfordítása felbontható két tükrözésre, melyek tengelyei átmennek E-n és az első tengelyt a másodikba $\varepsilon/2$ nagyságú elfordítás viszi át ugyanabban az irányban, mint a vizsgált elfordítás, továbbá hogy ebben a felbontásban a tengelyek egyikének iránya szabadon választható.

Jelöljük a B körüli, 2β szögű elfordítás, valamint a D körüli, 2δ szögű elfordítás ilyen felbontásában a tengelyeket a tükrözés sorrendjében t_1-gyel és t_2-vel, ill. t_3-mal és t_4-gyel, és válasszuk t_2 és t_3 szerepére egyaránt a BD egyenest. Ez kétféleképpen is egyszerűsíti a gondolt eljárást. Egyrészt a t_2-n és t_3-on való tükrözés „megsemmisítik egymást", vagyis a t_3-on való tükrözés visszaállítja a t_1-en való tükrözés utáni helyzetet. Másrészt t_4 párhuzamos lesz t_1-gyel, hiszen mindkettőt BD-ből kapjuk B körüli $(-\beta)$ szögű, illetve D körüli $(+\delta)$ szögű elfordítással, e szögek kapcsolatát pedig már a fentiekből ismerjük.

Mármost két párhuzamos tengelyen való egymás utáni tükrözés eredménye eltolás, melynek vektora merőleges a tengelyekre, az első tengelytől a második felé irányul és abszolút értéke 2-szer akkora, mint a tengelyek távolsága: [1] $4r\ \sin\ \alpha\ \sin\beta$, ahol r a kör sugara és $\alpha = DAB\sphericalangle$, $\beta = ABC\sphericalangle$. (Az 1. ábra egy tetszőleges P pontra, a 2. ábra pedig a kör középpontjára bemutatja az egymás utáni tükrözéseket.)

[1] Lásd a Gy. 1376. gyakorlat megoldását K. M. L. 45. (1972) 15.



2. ábra