I. megoldás. Legyen a tér tetszőleges O pontjából az $ABCD$ tetraéder csúcsaiba mutató helyvektor rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, így az ABC lap S_D súlypontjába mutató helyvektor

$$\mathrm{S}_D=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3},$$

a további ABD, ACD, BCD lapok súlypontjába mutató helyvektor rendre

$$\mathrm{S}_C=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{d}}{3},\quad \mathrm{S}_B=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{3},\quad \mathrm{S}_A=\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{3},$$

a tetraéder S súlypontjának helyvektora pedig

$$\mathrm{S}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}=\frac{\mathrm{S}_D+\mathrm{S}_C+\mathrm{S}_B+\mathrm{S}_A}{4}.$$

Legyen másrészt az ABC, ABD, ACD, BCD lap egy-egy tetszés szerinti D_1, C_1, B_1, ill. A_1 pontjába az illető lap súlypontjából húzott vektor rendre $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{u}$, így a fölvett pontok helyvektora rendre

$$\mathrm{S}_D+\mathbf{x},\qquad \mathrm{S}_C+\mathbf{y},\qquad \mathrm{S}_B+\mathbf{z},\qquad \mathrm{S}_A+\mathbf{u},$$

a megfelelő lapsúlypontra vett D_1', C_1', B_1', ill. A_1' tükörképük helyvektora pedig rendre

$$\mathrm{S}_D-\mathbf{x},\qquad \mathrm{S}_C-\mathbf{y},\qquad \mathrm{S}_B-\mathbf{z},\qquad \mathrm{S}_A-\mathbf{u}$$

lesz. Továbbá a fölvett, illetőleg a tükrözéssel kapott pontnégyes súlypontjának helyvektora, mindjárt alkalmas rendezéssel

$$\mathrm{S}_1=\frac{\mathrm{S}_D+\mathrm{S}_C+\mathrm{S}_B+\mathrm{S}_A}{4}+\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}+\mathbf{u}}{4}=\mathbf{s}+\mathbf{v},$$

ahol $\mathbf{v}$ a bal oldal második tagját rövidíti, illetőleg

$$\mathbf{s'}_1=\mathbf{s}-\mathbf{v}.$$

Innen

$$\frac{\mathbf{s}_1+\mathbf{s'}_1}{2}=\mathbf{s},$$

ami az állítást bizonyítja.

A bizonyításban nem használtuk ki, hogy a fölvett pontok rendre benne vannak a mondott lap síkjában, így az állítás ezen korlátozás nélkül érvényes.

Kirchner Imre (Budapest, Steinmetz M. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Általában az $\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_n$ helyvektorú $P_1,P_2,\ldots,P_n$ pontok $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ súlyrendszerre vonatkozó súlypontjának a tér

$$\mathbf{r}=\frac{\alpha_1\cdot\mathbf{r}_1+\alpha_2\cdot\mathbf{r}_2+\ldots+\alpha_n\cdot\mathbf{r}_n}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}$$

helyvektorú P pontját nevezzük. (Az $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ súlyok tetszőleges valós számok lehetnek, melyek összege 0-tól különböző.) E definícióból következik, hogy a $P_1,P_2,\ldots,P_n$ pontoknak a $c\alpha_1,c\alpha_2,\ldots,c\alpha_n$ súlyrendszerre vonatkozó súlypontja ugyanaz, mint e pontok $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ súlyrendszerre vonatkozó súlypontja, ha $c\neq 0$. Igaz továbbá, hogy ha a $P_1,P_2,\ldots,P_k$ pontokat ($k\leqq n$) az $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ súlyrendszerre vonatkozó P' súlypontjukkal helyettesítjük, melyhez az $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k)$ súlyt rendeljük, a súlypont változatlan marad, hiszen a helyvektorok $(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)$-szerese egyenlő:

$$\begin{aligned}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k)\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\ldots+\mathbf{r}_k}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k}+\alpha_{k+1}\mathbf{r}_{k+1}+\ldots+\alpha_n\mathbf{r}_n=\\=\alpha_1\mathbf{r}_1+\ldots+\alpha_n\mathbf{r}_n\end{aligned}$$

(feltéve, hogy $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k\neq 0$).

Ezek alapján feladatunk megoldása a következő. A $ABCD$ tetraéder szokásos értelemben vett súlypontja azonos az $(1,1,1,1)$ súlyrendszerre vett súlyponttal vagy a $(3,3,3,3)$ súlyrendszerre vett súlyponttal. Utóbbi megkapható úgy is, hogy laponként képezzük a lapok csúcspontjainak $(1,1,1)$ súlyrendszerre vonatkozó súlypontját, majd a kapott pontoknak (a lapok közönséges súlypontjának) vesszük a $(3,3,3,3)$ súlyrendszerre vonatkozó súlypontját. Az $ABCD$ és a $S_AS_BS_CS_D$ tetraéderek S súlypontja tehát azonos.

Az A_1, B_1, C_1, D_1, A_1', B_1', C_1', D_1' pontrendszer $(1,1,1,1,1,1,1,1)$ súlyrendszer melletti súlypontját is kétféleképpen határozzuk meg. Először vesszük az $A_1B_1C_1D_1$, illetve $A_1'B_1'C_1'D_1'$ pontnégyes $(1,1,1,1)$ súlyrendszer melletti súlypontját, kapjuk az S_1, S_1' pontokat, majd vesszük az S_1, S_1' pontok $(4,4)$ súlyrendszer melletti súlypontját, ez az S_1S_1' szakasz felezőpontja. De képezhetjük először az (A_1,A_1'), (B_1,B_1'), (C_1,C_1') és (D_1,D_1') pontpárok $(1,1)$ súlyrendszer melletti súlypontját, kapjuk az S_A, S_B, S_C, S_D pontokat, majd ezeknek vesszük a $(2,2,2,2)$ súlyrendszerre vonatkozó súlypontját, ami az $S_AS_BS_CS_D$ tetraéder S súlypontjával azonos. S tehát az S_1S_1' szakasz felezőpontja, amint azt bizonyítani akartuk.