Mivel $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, és e tényezők páronként relatív prímek egymáshoz, azt kell belátnunk, hogy az adott D kifejezés 2, 3 és 5 mindegyikével osztható az adott föltételek mellett. Átalakítással

$$D = a^n(a^{m-n} - 1) = a^n\left((a^4)^k - 1^k\right) = a^n \cdot D',$$

ezért azokat az eseteket, amelyekben az állítás nyilvánvaló, elhagyva, elég azt megmutatnunk, hogy amelyik törzsszám a 2, 3 és 5 közül nem osztója a^n-nek, azaz magának a-nak sem, az osztója D'-nek. Tovább egyszerűsítve, elég ezt belátni $D'' = (a^4 - 1)$-re, ami mindenesetre osztója D'-nek az egyenlő kitevőjű hatványok különbségére ismert

$$A^k - B^k = (A - B)(A^{k-1} + A^{k-2} \cdot B + A^{k-3} \cdot B^2 + \ldots + B^{k-1})$$

azonosság alapján, hiszen az $m > n$ és $m - n = 4k$ föltevésekre tekintettel $k \geq 1$.

Mármost

$$D'' = (a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1),$$

eszerint, ha a nem osztható 2-vel, akkor a jobb oldal első tényezője páros (a semmitmondó $a = 1$ esetet el is hagyhatjuk); ha a nem osztható 3-mal, akkor az első két tényező valamelyike osztható vele, hiszen $(a-1)$, a és $(a+1)$ egymás utáni természetes számok, és bármely három egymás utáni egész szám közül egy osztható 3-mal;
végül ha a és még D'' első két tényezője sem osztható 5-tel, akkor a ilyen alakú: $a = 5m \pm 2$, és ekkor D'' harmadik tényezője osztható 5-tel, mert $a^2 + 1 = 5(5m^2 \pm 4m + 1)$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Forró Margit (Komárno, Általános Középiskola, II. o. t.)

Megjegyzések 1. Azt is látjuk, hogy D mindig osztható 60-nal is, mert ha a páros, akkor $n \geq 2$ miatt a^n a 2-nek legalább a 2. hatványával osztható, ha pedig a páratlan, akkor 2^4-nel is, hiszen ekkor D'' mindhárom tényezője páros és $a - 1$, $a + 1$ egyike 4-gyel is osztható.

2. A 3-mal való oszthatóság a következő alakításból is látható:

$$D = a^{n-2k}\left\{(a^{2k} - 1)a^{2k}(a^{2k} + 1)\right\}.$$

Likai László (Eger, Alpári Gy. Közg. Szki.)