I. megoldás. Csak akkor foglalkozhatunk a kérdéssel, ha a gyökök valósak, vagyis $b^2-4c\geq 0$. A követelmény alapján az x_1-gyel jelölt gyök b-vel is, c-vel is kifejezhető a másodfokú egyenlet együtthatói és a gyökök közti ismert összefüggéseket felhasználva, így tehát a keresett összefüggést az a követelmény adja meg, hogy a két kifejezésnek egyenlőnek kell lennie.

Mivel itt a négyzetes tag együtthatója $a=1$, azért a kívánt kapcsolat figyelembevételével

$$x_1+x_2=x_1-x_1^2=-b,$$
$$x_1x_2=-x_1^3=c.$$

Az utóbbiból

$$x_1=\sqrt[3]{-c},$$

és ezt az elsőbe helyettesítve a keresett összefüggés, alkalmas rendezéssel

$$\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{c^2}=b \qquad (\text{és}\ \ b^2-4c\geq 0). \tag{1}$$

Adott esetben a feltétel teljesülése kényelmesebben ellenőrizhető gyökjelmentes alakban. Köbreemeléssel és (1)-et ismét figyelembe véve ilyen alakot kapunk:

$$c+3c(\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{c^2})+c^2=c+3bc+c^2=b^3,$$

átrendezve

$$b^3-3bc-c^2-c=0. \tag{2}$$

Megjegyzések. 1. Az (1) és (2) föltétel nemcsak szükséges (hiszen a követelmény teljesüléséből indultunk ki), hanem elegendő is. Ha ugyanis (2)-be beírjuk a

$$b=-(x_1+x_2) \qquad c=x_1x_2$$

összefüggéseket, szorzattá alakítással adódik

$$x_1^3+x_2^3+x_1^2x_2^2+x_1x_2=(x_1^2+x_2)(x_1+x_2^2)=0,$$

eszerint

$$\text{vagy}\ \ x_1^2+x_2=0, \qquad \text{vagy}\ \ x_2^2+x_1=0,$$

tehát a követelmény teljesül.

Balogh Zoltán (Debrecen, Fazekas M. Gimn., II. o. t.)
Füredi Zoltán (Budapest, Móricz Zs. Gimn., II. o. t.)

2. A kívánt kapcsolatot felmutató egyenletre konkrét számpéldát természetesen nem (1) vagy (2) alapján írunk föl, hanem x_1 megválasztásával. Legyen pl. $x_1=1/2$, ekkor $x_2=-1/4$, és az a másodfokú egyenlet, melynek e két szám a gyöke:

$$(x-1/2)(x+1/4)=x^2-x/2-1/8=0$$

és a $b=-1/2$, $c=-1/8$ értékpár valóban teljesíti (1)-et.

II. megoldás. Jelölje ε a $+1$ és -1 számok egyikét, ekkor

$$x_1=\frac{1}{2}\left(-b-\varepsilon\sqrt{b^2-4c}\right), \qquad x_2=\frac{1}{2}\left(-b-\varepsilon\sqrt{b^2-4c}\right)$$

és ha a követelmény teljesül, akkor

$$\frac{1}{4}\left(-b+\varepsilon\sqrt{b^2-4c}\right)^2=\frac{1}{2}\left(b+\varepsilon\sqrt{b^2-4c}\right), \tag{3}$$

kifejtve

$$b^2-b-2c=\varepsilon(b+1)\sqrt{b^2-4c},$$

amiből négyzetreemeléssel (amikor mindenesetre $\varepsilon^2=1$), rendezéssel ismét a fenti (2) föltételre jutunk.

Szekeres Vince (Komárno, Ált. Középisk., II. o. t.)

Megjegyzés. ε-nak a számításból való „kiesés” természetesen nem azt jelenti, hogy (3) az ε bármelyik értékével teljesül, hanem hogy valamelyik értékével.