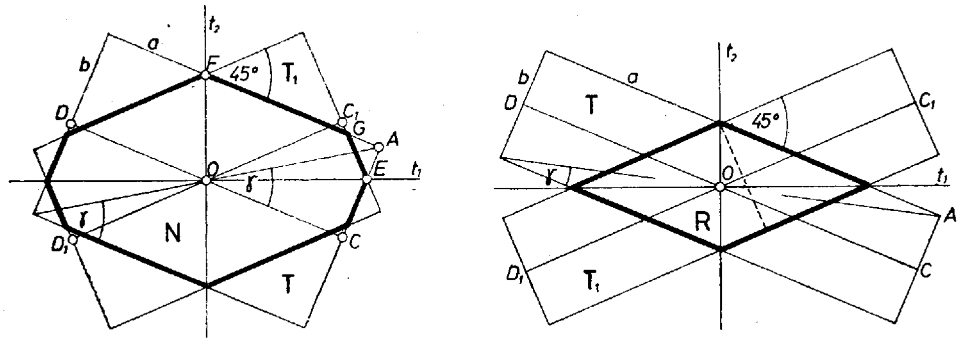
I. Legyen a két téglalap T és T_1, közös középpontjuk O, oldalaik hossza a és b, ahol $a \geq b$. T_1 mindegyik oldala 45° szöggel hajlik T mindegyik oldalához, így a két idom a hosszúságú CD és C_1D_1 oldalfelezői (hossztengelyei) is 45° szöget zárnak be ($COC_1\sphericalangle = 45^\circ$, $C_1OD\sphericalangle = 135^\circ$), és a T-ből és T_1-ből álló X alakzat szimmetrikus az ezek közti szögek t_1, t_2 felezőire, mint tengelyekre nézve.



Ezeken tükrözve T és T_1 egymásba mennek át, CD a C_1D_1-be, ill. D_1C_1-be. Legyen még T-nek a COC_1, szögtartományban ($a = b$ esetén az OC_1 száron) levő csúcsa A. Így T és T_1, közös része egy N nyolcszög vagy egy R rombusz aszerint, hogy CA nagyobb C_1A-nál vagy nem (egyenlőségük esetén A a rombusz egyik csúcsa); mondhatjuk így is: a közös rész nyolcszög, ha $AOC\sphericalangle > 45^\circ/2 = = 22{,}5^\circ$, különben rombusz. Az X által (egyszeresen) lefedett terület pedig $2ab - N$, ill. $2ab - R$, ahol N, R az illető idom területét is jelöli.

II. Az első esetben T-nek A-ból induló, b hosszúságú oldala t_1-en metszi T_1 nek b hosszúságú oldalát az E pontban, az a hosszúságú oldalát pedig t_2-n az F pontban és még egyszer G-ben. Ekkor X-et úgy kapjuk, hogy T-hez hozzáveszünk két-két GE, ill. GF átfogójú, egyenlő szárú, derékszögű háromszöget (hiszen N egyenlő T és a 4 háromszög területének különbségével).

A két átfogó hossza kiszámítható a következő egyenletrendszerből:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot GE + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) GF = a,$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) GE + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot GF = b$$

(a és b mindegyike tartalmazza a kétféle háromszög egy-egy befogóját, továbbá egyet-egyet az átfogók közül), éspedig

$$GE = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(b - (\sqrt{2} - 1)a\big), \qquad GF = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(a - (\sqrt{2} - 1)b\big),$$

ahonnan a 4 háromszög területének összege

$$2\left(\frac{GE^2}{4} + \frac{GF^2}{4}\right) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab),$$

és ezt ab-vel növelve az X alakzat területe

$$X_1 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(a + b)^2.$$

Eredményünk addig érvényes, amíg $GE \geq 0$, azaz $b/a \geq \sqrt{2} - 1$ (és persze $b/a \leq 1$). Ez a korlát éppen $\operatorname{tg}(45^\circ/2)$, vagyis azt kívánja, hogy a T átlója és hossztengelye közti γ szög ne legyen kisebb $22{,}5^\circ$-nál, amit az ábra szemléletéből is kiolvastunk. (GF viszont mindig pozitív.

A második esetben R oldala egyenlő a b befogójú, egyenlő szárú, derékszögű háromszög átfogójával, magassága pedig maga b, így az alakzat területe

$$X_2 = 2ab - \sqrt{2}b^2,$$

hacsak

$$\frac{b}{a} \leq \sqrt{2} - 1 = \operatorname{tg} 22{,}5^\circ, \quad \text{azaz ha} \quad AOC\sphericalangle \leq 22{,}5^\circ.$$

III. Vizsgáljuk X és T területének q arányát, mint az oldalak $b/a = r$ arányának függvényét, míg r az 1-től $\sqrt{2} - 1$-ig; majd tovább 0-ig csökken (azonban $r > 0$), más szóval T és T_1 szélességét egyre csökkentve, hosszúságukat állandóan tartva.

Az első intervallumban

(1) $$q = \frac{X_1}{ab} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{b}{a} + 2 + \frac{a}{b}\right) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(r + \frac{1}{r} + 2\right),$$

és itt r csökkentésével a második tényező változó része monoton nő. Ha ugyanis $\sqrt{2}-1 \leq r_2 < r_1 \leq 1$, akkor

$$\left(r_2+\frac{1}{r_2}\right)-\left(r_1+\frac{1}{r_1}\right)=(r_1-r_2)\left(\frac{1}{r_1 r_2}-1\right)>0,$$

mert mindkét tényezője pozitív. Így első kérdésünk szempontjából csak az $r=\sqrt{2}-1$ értékhez tartozó $q=\sqrt{2}$ értékre van szükségünk. A második kérdés céljára az $r=1$-hez tartozó (lehető legkisebb) érték: $q=4-2\sqrt{2}(=1,172)$.

A $0<r\leq\sqrt{2}-1$ intervallumban pedig

(2) $$q=\frac{X_2}{ab}=2-\sqrt{2}r,$$

r csökkenésével ez is monoton nő, $r=\sqrt{2}-1$ esetén $q=\sqrt{2}$; másrészt minden r-re $q<2$. Azaz q-nak nincs legnagyobb értéke, de bármilyen kicsi pozitív szám ε, van olyan b/a arány, amelyre $q>2-\varepsilon$ (természetesen $\varepsilon<2-\sqrt{2}$).

IV. Az eddigiek szerint q értéke – hacsak $q\geq 4-2\sqrt{2}$ – egyértelműen meghatározza T oldalainak r arányát, éspedig

$$4-2\sqrt{2}\leq q<\sqrt{2}$$

esetén az (1)-ből adódó

$$r+\frac{1}{r}+2-(2+\sqrt{2})q=0$$

másodfokú egyenlet $\sqrt{2}-1$ és 1 közti gyöke lesz az arány (tudjuk, hogy van ilyen gyök és csak egy, mert a másik gyök ennek reciproka, tehát >1), továbbá

$$\sqrt{2}\leq q<2$$

esetén pedig (2)-ből

$$r=\frac{2-q}{\sqrt{2}}.$$

Turán György (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)
Kovalcsik András (Balassagyarmat, Balassi B. Gimn., II. o. t.)