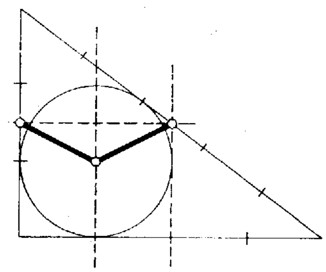
I. megoldás. Nevezzük T tulajdonságúnak a háromszöget, ha beírt körének középpontja egyenlő távolságra van (legalább) két oldalfelező ponttól. Minden egyenlő szárú háromszög nyilvánvalóan T tulajdonságú, a kérdéses oldalak szerepére a szárakat véve.

Másrészt könnyű adni különböző oldalú, T tulajdonságú háromszöget is: ilyen a jól ismert, ún. „egyiptomi” derékszögű háromszög, melynek két befogója 3 és 4, átfogója 5 egységnyi (1. ábra).



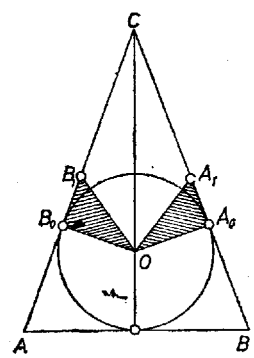
1. ábra

Ugyanis beírt körének sugara az ismert képlet szerint $\varrho = t/s = 1$ egység, 1/4 része a hosszabbik befogónak, ezért középpontja rajta van a 3 egységnyi befogó és a vele párhuzamos középvonal közti sáv szimmetriatengelyén, a 3 és 5 egységnyi oldalak felezőpontjai pedig egymás tükörképei e tengelyre nézve, mert összekötő egyenesük párhuzamos a 4 egységnyi befogóval, tehát merőleges a tengelyre; így ez a két felezőpont egyenlő távolságra van a kör középpontjától.

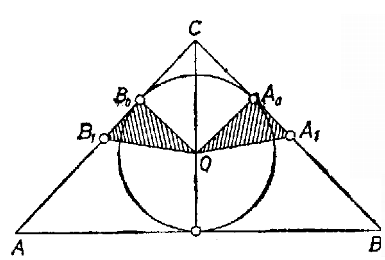
Már ez az egyetlen ellenpélda elég ennek kimondásához: a feladatban megadott tulajdonságból nem következik, hogy a háromszögben van két egyenlő oldal. Ezzel a feladat kérdésére megadtuk a választ.

II. megoldás. Ha egy háromszög eleget tesz a feladatban leírt követelménynek, válasszuk úgy a betűzését, hogy beírt körének O középpontjától az A és B csúccsal szemben fekvő oldal A_1, ill. B_1 felezőpontja legyen egyenlő távolságra, legyen továbbá a kör érintési pontja az oldalon A_0, ill. B_0. Az OA_1A_0 és OB_1B_0 derékszögű háromszögek $OA_1 = OB_1$ és $OA_0 = OB_0$ alapján egybevágók, és így (2–4. ábrák):

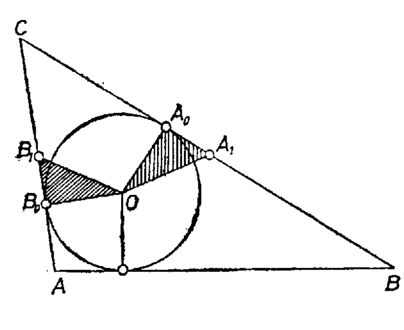
$$B_0B_1 = A_0A_1.$$



2. ábra



3. ábra



4. ábra

E két szakasz kifejezhető az $A_0C = B_0C$ szakasszal, közös hosszuk, mint ismeretes, $s - c$, $CA_1 = a/2$-vel és $CB_1 = b/2$-vel, ha tudjuk, hogy A_0 és A_1, valamint B_0 és B_1 közül melyik van közelebb C-hez:

$$A_0A_1 = \begin{cases} CA_1 - CA_0 = \dfrac{a}{2} - (s-c), & \text{ha} \quad CA_1 \geq CA_0, \\ \\ CA_0 - CA_1 = (s-c) - \dfrac{a}{2}, & \text{ha} \quad CA_1 < CA_0; \end{cases}$$

$$B_0B_1 = \begin{cases} \dfrac{b}{2} - (s-c), & \text{ha} \quad CB_1 \geq CB_0, \\ (s-c) - \dfrac{b}{2}, & \text{ha} \quad CB_1 < CB_0. \end{cases}$$

A 2–2 lehetőség $2 \cdot 2 = 4$-féleképpen állítható párba. Mindkétszer az alsót, vagy mindkétszer a felsőt véve:

$$\frac{a}{2} - (s-c) = \frac{b}{2} - (s-c),$$

amiből $a = b$, a háromszög egyenlő szárú (magas, ill. lapos, 2–3. ábrák); ha pedig A_0A_1-re a felső, B_0B_1-re az alsó lehetőséget vesszük (amiből $a > b$, hiszen $2(s-c)$ köztük levő érték):

$$(1) \qquad \frac{a}{2} - (s-c) = (s-c) - \frac{b}{2}, \quad \text{akkor} \quad c = \frac{a+b}{2}$$

(a hátra levő 4. párba állítás ugyanerre vezet, de $a < b$ adódik, az egyenrangú szerepet játszó betűk fölcserélődnek, ez tehát nem lényegesen különböző eset), azaz a feltevésbeli $OA_1 = OB_1$-ben nem szereplő oldal a másik kettőnek számtani közepe (és $a > c > b$).

Fenti meggondolásunk megfordításával könnyen belátható, hogy (1)-ből is következik, hogy $CA_1 = CB_1$. Abból tehát, hogy a beírt kör középpontja egyenlő távolságra van két oldal felezőpontjától, nem következik, hogy a háromszög egyenlő szárú, csak annyit mondhatunk, hogy ebben az esetben a háromszög vagy egyenlő szárú, vagy az egyik oldal a másik kettő számtani közepe. (Szabályos háromszögeknél e kettő persze egyszerre teljesül.)