I. megoldás. Tegyük fel, hogy a kérdéses rendszer létezik és jelöljük alapszámát (bázisát) b-vel. Ekkor

$$\frac{5b^2+7b+2}{2b^2+7b+5}=q, \tag{1}$$

ahol q természetes szám. A felhasznált 7-es számjegy miatt nyilvánvalóan $b\geq 8$. A két kifejezés egymáshoz hasonlóan szorzattá alakítható, ennek alapján

$$q=\frac{(5b+2)(b+1)}{(2b+5)(b+1)}=\frac{5b+2}{2b+5}=2+\frac{b-8}{2b+5}.$$

Itt az utolsó alakbeli tört kifejezés értéke egész és nem negatív, mert a számláló nem negatív, a nevező pedig pozitív. De nem lehet az értéke pozitív egész szám sem, hiszen a nevező a megengedett b értékekre nagyobb a számlálónál:

$$(2b+5)-(b-8)=b+13\geqq 21>0.$$

Ezért a tört értéke csak 0 lehet, és ebből $b=8$, $q=2$. (Valóban, ${}^{8)}275={}^{10)}\,189$, ${}^{8)}572={}^{10)}\,378=2\cdot{}^{10)}\,189$.)

Berkó András (Szeged, Radnóti M. Gimn., II. o. t.)
Meződi Judit (Kaposvár, Munkácsy M. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Az (1) összefüggésből a következő másodfokú egyenlet adódik b-re

$$(5-2q)b^2+7(1-q)b+(2-5q)=0, \tag{2}$$

ahol q-nak olyan természetes számot kell választanunk, hogy az egyenletnek legyen 7-nél nagyobb egész gyöke. (2)-ből

$$b=\frac{-7+7q\pm\sqrt{49(1-q)^2-4(5-2q)(2-5q)}}{2(5-2q)}=\frac{-7+7q\pm\sqrt{9q^2+18q+9}}{2(5-2q)}=\begin{cases}\frac{5q-2}{5-2q}\\ -1\end{cases}$$

Olyan q-t kell tehát választanunk, amelyre

$$\frac{5q-2}{5-2q}\geq 8,\quad \frac{5q-2}{5-2q}-8=\frac{21(q-2)}{5-2q}\geq 0.$$

Itt a számláló $q<2$-re negatív, $q\geq 2$-re nem negatív, a nevező $q<5/2$-re pozitív, $q>5/2$-re negatív. Így a tört $2\leq q<5/2$-re van értelmezve és nem negatív, tehát egyedül a $q=2$ egészre teljesül a feltétel. Ekkor az alapszámra a $b=8$ érték adódik.