I. megoldás. Vezessük be átmenetileg a következő jelöléseket:

$$b+c+d=A, \qquad c+a+d=B, \qquad a+b+d=C.$$

Ezekkel

$$\begin{aligned}K &= (B-A)\,AB+(C-B)\,BC+(A-C)\,CA=\\ &= B(AB-A^2+C^2-BC)+(A-C)\,CA=\\ &= B\big\{(A-C)(B-A-C)\big\}+(A-C)\,CA=\\ &= (A-C)\{B^2-AB-BC+CA\}=(A-C)(B-A)(B-C),\end{aligned}$$

végül az eredeti változókra visszatérve

$$K=(c-a)(a-b)(c-b)=-(a-b)(b-c)(c-a).$$

Látjuk, hogy a kifejezés nem függ d-től.

Zentai István (Budapest, Móricz Zs. Gimn., I. o. t.)
Varga Mária (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., I. o. t.)

II. megoldás. K első tagja (3 tényezős szorzata) részbeni kifejtéssel így alakítható:

$$\begin{gathered}(a-b)\big\{ab+(a+b)(c+d)+(c+d)^2\big\}=\\ =ab(a-b)+(a^2-b^2)(c+d)+(a-b)(c+d)^2.\end{gathered}$$

És mivel K második tagja úgy áll elő az elsőből – és a harmadik is a másodikból –, hogy minden egyes a, b, c, d betű helyére rendre a b, c, a, d betűt írjuk, azért a további két szorzat:

$$\begin{gathered}bc(b-c)+(b^2-c^2)(a+d)+(b-c)(a+d)^2,\\ ca(c-a)+(c^2-a^2)(b+d)+(c-a)(b+d)^2.\end{gathered}$$

Könnyen belátható, hogy további kifejtéssel a 3. oszlopban d^2 együtthatója 0, ugyanígy d-é is (a 2. és 3. oszlopban külön-külön is), továbbá, hogy az 1. és 2. oszlopból a d-t nem tartalmazó rész is 0. Eszerint csupán a 3. oszlopból, mindjárt tovább alakítva

$$\begin{aligned}K &= (a-b)\,c^2+(b-c)\,a^2+(c-a)\,b^2=\\ &= (a-b)\,c^2+\big\{ab(a-b)-c(a^2-b^2)\big\}=\\ &= (a-b)\big\{c^2-(a+b)\,c+ab\big\}=(a-b)(c-b)(c-a).\end{aligned}$$

Az utolsó alakításban azt a felismerést használtuk fel, hogy a$\big\{\big\}$-ben álló kifejezést c-re vonatkozó, 0-ra redukált másodfokú egyenlet bal oldalának tekintve, ennek gyökei a és b.

III. megoldás. Kifejezésünk bármelyik betűre mint változóra nézve legföljebb másodfokú polinom. Tekintsük a polinomjának, ekkor

$$K=k(a-a_1)(a-a_2)$$

alakban írható, ahol k az a^2 együtthatója, a_1 és a_2 pedig a polinom zérushelyei.

Könnyű belátni, hogy a helyére b-t, vagy c-t helyettesítve $K=0$ adódik pl. $a=b$ esetén K első tagja 0, a másik kettő pedig csak az első tényezőkben különbözik, ezek összege pedig 0), tehát $a_1=b$, $a_2=c$. Továbbá a^2 együtthatója

$$k=(b+c+d)+(b-c)-(b+c+d)=b-c,$$

tehát

$$K=(b-c)(a-b)(a-c).$$

Reiczigel Jenő (Budapest, Fazekas M. Gimn., II. o. t.)