I. megoldás. 1. Jelöljük az adott szakaszokat m_a, m_b-vel úgy, hogy $m_a \leq m_b$ legyen, így a háromszög harmadik magassága $m_c = m_a + m_b$. A háromszög t területét felhasználva a rájuk merőleges oldalak rendre:

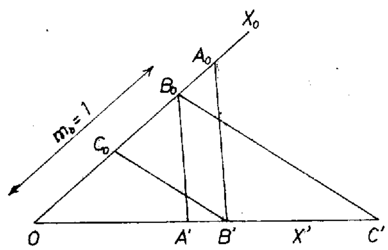
$$a = 2t\frac{1}{m_a}, \quad b = 2t\frac{1}{m_b}, \quad c = 2t\frac{1}{m_c}.$$

Innen

$$a : b : c = \frac{1}{m_a} : \frac{1}{m_b} : \frac{1}{m_c}, \tag{1}$$

vagyis a háromszög oldalainak arányát megadja a megfelelő magasságok reciprokainak aránya. Az utóbbiak ismeretében a keresetthez hasonló háromszöget szerkesztünk, majd ezt úgy nagyítjuk (ill. kicsinyítjük), hogy legkisebbik magassága m_a legyen.

2. Egy tetszés szerinti szakaszt hosszúságegységnek választva a magasságok reciproka szerkeszthető, pl. egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel metszve. Legyen $m_b = 1$, mérjük fel ezt a szakaszt az X_0OX' szög OX_0 szárára – legyen a végpontja B_0 – , OX'-re pedig az $OA' = m_a$, $OB' = m_b (= 1)$ és $OC' = m_c = m_a + m_b$ szakaszt és húzzuk meg a párhuzamost B'-n át $A'B_0$-lal és $C'B_0$-lal, az OX_0-lal való A_0, ill. C_0 metszéspontig (1. ábra).

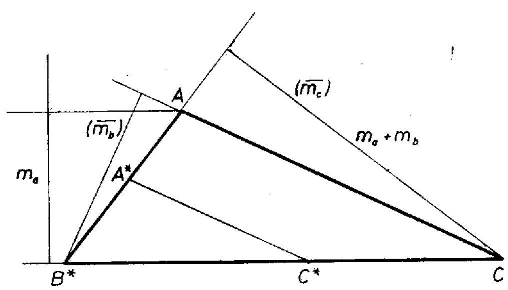


1. ábra

Ekkor

$$OA_0 : OB_0 = OB' : OA' \quad \text{és} \quad OC_0 : OB_0 = OB' : OC'$$

alapján az $OA_0 = 1/OA' = 1/m_a = a_0$, $OC_0 = 1/m_c = c_0$, továbbá $1/m_b = OB_0 = b_0$ szakaszokból szerkesztett $A^*B^*C^*$ háromszög hasonló a keresetthez. Ezért a B^*A^* egyenest B^*C^*-tól m_a távolságban, az A pontban metszve, végül a B^*C^* egyenest az A-n átmenő, A^*C^*-gal párhuzamos egyenessel C-ben metszve, AB^*C egy a követelményt kielégítő háromszög (2. ábra).



2. ábra

3. Valóban az AB^*C háromszög A-ból induló magassága m_a, és véve a B^*-ból és C-ből húzott $\overline{m_b}$, ill. $\overline{m_c}$ magasságait, ezek reciprokainak aránya (1), valamint a végzett szerkesztések szerint:

$$\frac{1}{m_a} : \frac{1}{\overline{m_b}} : \frac{1}{\overline{m_c}} = B^*C : CA : AB^* = B^*C^* : C^*A^* : A^*B^* = OA_0 : OB_0 : OC_0,$$

továbbá egyrészt

$$\frac{1}{m_a} : \frac{1}{\overline{m_b}} = OA_0 : OB_0 = OB' : OA' = 1 : m_a,$$

innen $\overline{m_b} = 1 = m_b$; másrészt

$$\frac{1}{\overline{m_b}} : \frac{1}{\overline{m_c}} = OB_0 : OC_0 = OC' : OB' = (m_a + m_b) : 1,$$

innen pedig a legutóbbi eredmény alapján

$$\overline{m_c} = m_a + m_b.$$

4. A szerkesztés végrehajtható volta csak azon múlik, létrejön-e az $A^*B^*C^*$ háromszög, vagyis legnagyobb oldala kisebb-e a másik kettő összegénél, azaz teljesül-e

$$\frac{1}{m_a} < \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_a + m_b}.$$

Innen rendezéssel

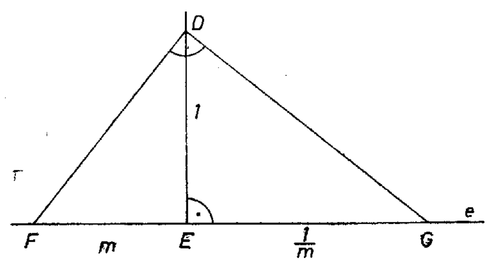
$$\left(\frac{m_a}{m_b}\right)^2 + \left(\frac{m_a}{m_b}\right) > 1, \quad \left(\frac{m_a}{m_b} + \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{5}{4},$$

ugyanis a szakaszok pozitívok. Eszerint a szerkesztés végrehajtható, ha

$$(0{,}618 \approx)\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{m_a}{m_b} \le 1.$$

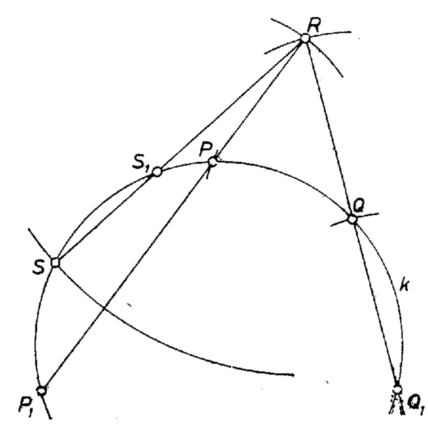
Bodnár István (Eger, Gárdonyi G. Gimn., II. o. t.)
Csernátony Géza (Budapest, I. László Gimn., II. o. t.)
Lévai Miklós (Tata, Eötvös J. Gimn., I. o. t.)
Szarka Imre (Komárno, Ált. Középisk., Szlovákia)

Megjegyzés. Megemlítünk két más eljárást szakaszok reciprokának, ill. azzal arányos szakasznak szerkesztésére. A $DE = 1$ szakaszra E-ben merőlegesen álló e egyenesre felmérjük az $EF = m$ szakaszt, majd e-t metsszük az FD-re D-ben állított merőlegessel a G pontban, ekkor $EG = 1/m$ (3. ábra).



3. ábra

Egy k kör (egymáshoz elég közel választott) P és Q pontja körül kört írunk m_a, ill. m_b sugárral, majd ezeknek a körön kívül fekvő R metszéspontja körül $m_a + m_b$ sugárral. Jelöljük k-nak az utóbbi körrel való egyik metszéspontját S-sel, továbbá az RP, RQ, RS egyenessel való második metszéspontját rendre P_1 gyel, Q_1-gyel, S_1gyel (4. ábra).



4. ábra

Ekkor $RP \cdot RP_1 = RQ \cdot RQ_1 = RS \cdot RS_1 =$ állandó $= p^2$ (p az R-ből k-hoz húzott érintő hossza), és pl. $RP_1 = p^2/m_a$. (V.L.)

II. megoldás. Tekintsünk el egyelőre az $m_c = m_a + m_b$ összefüggéstől, és legyen m_c is független adat. Az (1)-ben látott fordított arányosságot felhasználó, tetszetős elgondolás a következő. Azt, hogy az oldalak arányosak a megfelelő magasságok reciprokával, úgy is mondhatjuk, hogy az oldalak reciprokai arányosak a megfelelő magasságokkal. Szerkesszünk tehát segédháromszöget m_a-ból, m_b-ből és m_c-ből mint oldalakból és tekintsük ennek (rendre) μ_a, μ_b, μ_c magasságát. Ezek is és a keresett háromszög oldalai is olyan (összetett) arányban vannak, mint $(1/m_a) : (1/m_b) : (1/m_c)$, tehát a μ_a-ból, μ_b-ből és μ_c-ből mint oldalakból szerkesztett háromszög hasonló a keresetthez. Ebből a már látott módon kaphatjuk a keresett háromszöget.

Az elgondolásnak azonban van egy szépséghibája; a háromszög magasságaiból nem mindig szerkeszthető háromszög. (Gondoljunk hegyes ék alakú egyenlő szárú háromszögre, ilyen már az 1, 3, 3 oldalakkal szerkesztett háromszög is.) Eredeti feladatunkban is ez a helyzet. Eljárhatunk azonban úgy, hogy a segédháromszöget (a mondott helyett) a

$$2m_a, m_b, m_a + m_b$$

szakaszokból szerkesztjük mint oldalakból. Ebben a μ_a^*, μ_b, μ_c magasságok aránya

$$\mu_a^* : \mu_b : \mu_c = \frac{1}{2m_a} : \frac{1}{m_b} : \frac{1}{m_a + m_b} = \frac{a}{2} : b : c$$

(ahol a, b, c a keresett háromszög oldalai), ezért a $2\mu_a^*$, μ_b, μ_c szakaszokból mint oldalakból szerkesztett háromszög hasonló a kívánthoz. – Ezt tudva az I. megoldás záró része szerint járhatunk el.

A segédháromszög az alkalmazott fogással megszerkeszthető (mert legnagyobb oldala $m_a + m_b$), ez azonban nem biztosítja, hogy a $2\mu_a^*$, μ_b, μ_c szakaszokból mindig kapunk háromszöget. Ennek feltételéül ugyanazt kapjuk, mint az I. megoldásban.