I. megoldás. Elég azt megmutatni, hogy $N=2n^2-31$ alakú szám nem osztható a 2, 3, 5 és 7 egyjegyű prímszámokkal semmilyen egész n esetén sem, hiszen ha osztható volna pl. 6-tal, akkor 2-vel is, 3-mal is osztható volna. A 2-es osztóra nyilvánvaló az állítás, N mindig páratlan.

Egy különbség akkor és csak akkor osztható egy d számmal, ha d-vel osztva a tagjait, egyenlő maradékok lépnek fel, azaz ha
$$a=q_1d+r \qquad \text{és} \qquad b=q_2d+r \qquad (0\le r<d),$$
akkor
$$a-b=(q_1-q_2)d;$$
és fordítva, ha
$$a-b=q_3d \qquad (\text{és ismét} \qquad b=q_2d+r),$$
akkor
$$a=(a-b)+b=(q_3+q_2)d+r.$$

Ennek alapján a 3, 5 és 7 osztók esetében külön-külön vizsgáljuk $2n^2$ és 31 maradékát.

3-mal osztva, n legkisebb nem negatív maradéka 0, 1 vagy 2, azaz $n=3k$ vagy $3k+1$ vagy $3k+2$, ahol k egész, így $n^2=9k^2=3\cdot 3k^2$, ill. $9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$, ill. $3(3k^2+4k+1)+1$, vagyis az $n^2:3$ osztás maradéka 0 vagy 1, így a $2n^2:3$ osztásé 0 vagy 2, tehát nem 1, mint a $31:3$ osztásé. Eszerint N sohasem osztható 3-mal.

Célszerűbb a legkisebb abszolút értékű maradékot tekinteni. Így $n=3k+2=3(k+1)-1=3m-1$ és $n^2=3(3m^2-2m)+1$, mint az $n=3k+1$ esetben. A további osztók esetében az egyenlő abszolút értékű maradékok esetét párokba kapcsoljuk.

Az 5-ös osztó szempontjából $n=5k$, vagy $5k\pm 1$, vagy $5k\pm 2$, és így
$$2n^2=5\cdot 10k^2, \qquad \text{ill.} \qquad 5(10k^2\pm 4k)+2, \ \text{ill.}$$
$$5(10k^2\pm 8k+1)+3,$$
tehát a $2n^2:5$ osztás legkisebb nem negatív maradéka 0, 2 vagy 3, viszont 31-et osztva 1 marad, így N sohasem osztható 5-tel.

Ugyanígy $n=7k$, $7k\pm 1$, $7k\pm 2$, $7k\pm 3$ szerint
$$2n^2=7(14k^2), \qquad \text{ill.} \qquad 7(14k^2\pm 4k)+2,$$
$$\text{ill.} \qquad 7(14k^2\pm 8k+1)+1, \qquad \text{ill.} \qquad 7(14k^2\pm 12k+2)+4,$$
a legkisebb nem negatív maradék rendre 0 vagy 2 vagy 1 vagy 4, ezzel szemben a $31:7$ osztás maradéka 3, tehát N sohasem osztható 7-tel. Ezzel – az előrebocsátottak értelmében – az állítást bebizonyítottuk.

Ugyanígy látható be, hogy 11-gyel sem osztható egyetlen N alakú szám sem, de ezt 13-ra már nem mondhatjuk: $n=10$ esetén $2n^2-31=169=13^2$. Eszerint $2n^2-31$ alakú számnak nincs 13-nál kisebb valódi osztója.

II. megoldás. Keressünk az $N=2n^2-31$ szám közelében az egyjegyű prímszámokkal osztható számot. Az
$$A=2n^2, \qquad B=2n^2-2, \qquad C=2n^2-8, \qquad D=2n^2-18$$
számok szorzata:
$$K=ABCD=16n(n-3)(n-2)(n-1)\,n(n+1)(n+2)(n+3)$$
osztható hét egymás utáni szám, ti. $n-3$, $n-2$, $\ldots$, $n+2$ és $n+3$ mindegyikével, K tehát osztható 2-vel is, 3-mal is, 5-tel is és 7-tel is. Emiatt az A, B, C, D számok között is van 2-vel osztható, van köztük 3-mal osztható, van köztük 5-tel osztható, és van köztük 7-tel osztható is. Bármelyik is osztható közülük ezekkel a számokkal, N nem lehet osztható velük, hiszen az
$$A-N=31, \qquad B-N=29, \qquad C-N=23, \qquad D-N=13$$
különbségek egyike sem osztható a 2, 3, 5, 7 számok egyikével sem. Ezzel feladatunk állítását bebizonyítottuk.

Ha az A, B, C, D számokhoz hozzávesszük az
$$E=2(n+4)(n-4)=2n^2-32, \qquad F=2(n+5)(n-5)=2n^2-50$$
számokat, a fentihez hasonló meggondolással kimutathatjuk, hogy N nem osztható 11-gyel sem, hiszen sem a fenti $A-N$, $B-N$, $C-N$, $D-N$ különbségek, sem az
$$E-N=1, \qquad F-N=19$$
különbségek nem oszthatók 11-gyel.

Balogh Zoltán (Debrecen, Fazekas M. Gimn., II. o. t.)