

Legyen a négy szám  $a, b, c, d$ , közös kezdő (százast helyi értékű) jegyük  $j (\geq 1)$ , összegük  $s$ , továbbá  $s/a = \alpha$ ,  $s/b = \beta$ ,  $s/c = \gamma$  természetes számok, végül az első három számnak (ti. amelyek osztói  $s$ -nek) nagyságviszonya:

$$100j \leq a < b < c < 100(j+1).$$

Így egyrészt  $\alpha > \beta > \gamma$ , másrészt

$$(1) \quad 1 < \frac{b}{a} < \frac{c}{a} < \frac{j+1}{j} \leq 2,$$

hasonlóan

$$(1a) \quad \frac{d}{a} < 2,$$

továbbá

$$(2) \quad \frac{c}{a} = \frac{\alpha}{\gamma} < 2.$$

Az összeg alapján (1) felhasználásával korlátokat kapunk az  $\alpha, \beta, \gamma$  hányadosokra:

$$\begin{aligned} \alpha a &= s < a + (2a + 2a + 2a) = 7a, & \alpha < 7; \\ \gamma c &= s = c + (a + b + d) > c + (100j + 100 + 0) = \\ &= c + 100(j+1) > 2c, & \gamma > 2. \end{aligned}$$

Ezek szerint az  $\alpha, \beta, \gamma$  számhármastagjai 6, 5, 4 és 3 közül valók, de (2) miatt nem léphet fel köztük egyszerre 6 és 3. Így értékük vagy 6, 5 és 4, vagy pedig 5, 4 és 3.

Az első esetben

$$\begin{aligned} a + b + c &= s \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \right) = \frac{37s}{60}, \\ d &= \frac{23s}{60} > \frac{s}{3} = 2a, \end{aligned}$$

ami (1a) szerint lehetetlen.

A második esetben hasonlóan

$$\begin{aligned} a + b + c &= s \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{12s}{60} + \frac{15s}{60} + \frac{20s}{60} = \frac{47s}{60}, \\ d &= \frac{13s}{60}, \end{aligned}$$

tehát számaink legnagyobbika  $c$ , legkisebbike  $a$ . Továbbá  $d$  egész voltára tekintettel  $s/60 = k$  egész szám.

A közös kezdő jegy miatt

$$\begin{aligned} c - a &= 20k - 12k = 8k < 100, \\ k &\leq 12 \quad \text{és} \quad s \leq 720, \end{aligned}$$

másrészt  $s > 400j$ , ezek szerint  $j < 2$ , tehát  $j = 1$ . Most már  $c = 20k < 200$  alapján  $k \leq 9$ , és  $a = 12k \geq 100$  alapján  $k \geq 9$ , tehát  $k = 9$ ,  $s = 540$ ,  $a = 108$ ,  $b = 135$ ,  $c = 180$ ,  $d = 117$ .