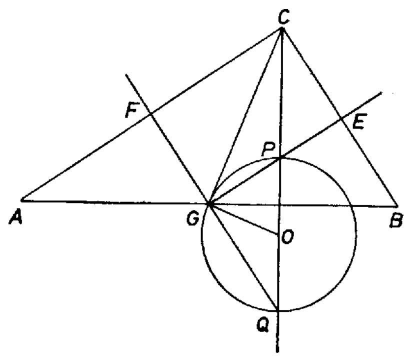
I. megoldás. Legyen a háromszög átfogója AB, és legyen rajta P, Q a BC, ill. AC befogóra az E, ill. F felező pontban állított merőlegesen.



Így a CPE és a QCF háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, mert a csúcsok felsorolása szerint páronként megfelelő oldalaik merőlegesek egymásra, tehát az oldalpárok aránya egyenlő:

$$\frac{CP}{AB}=\frac{CE}{AC}=\frac{CB}{2AC},\qquad \frac{CQ}{BA}=\frac{CF}{BC}=\frac{CA}{2BC},$$

innen

$$\sqrt{CP\cdot CQ}=\sqrt{\frac{AB\cdot CB}{2AC}\cdot\frac{BA\cdot CA}{2BC}}=\frac{AB}{2},$$

amit bizonyítanunk kellett.

Hetzmann Antal (Tatabánya, Árpád Gimn., I. o. t.)

Megjegyzés. Ha a befogók egyenlők, akkor P és Q egybeesik az átfogó G felezőpontjával, az állítás semmitmondó, $CP=CQ=CG=AB/2$, hiszen ekkor CGA is egyenlő szárú derékszögű háromszög.

Császár Gyula (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., I. o. t.)

II. megoldás. A fenti jelölésekkel elég azt belátnunk, hogy a PQ átmérőjű, O középpontú kört a CG egyenes G-ben érinti, hiszen CP és CQ e körnek C-ből húzott szelői, mert P is, Q is abban az ACB derékszögtartományban vannak, mint maga az ABC háromszög, másrészt $CG=GA=AB/2$, hiszen G az ABC háromszög köré írt kör középpontja.

G rajta van a PQ átmérőjű körön, mert itt metszi egymást a két felező merőleges, amelyek pedig egymásra is merőlegesek. Választhatjuk a betűzést úgy, hogy $CA>CB$ legyen, ekkor P a GE szakaszon, Q pedig az FG meghosszabbításán adódik, $CP<CQ$, ezért az OCG háromszögben

$$\begin{aligned}POG\sphericalangle+GCO\sphericalangle&=2PQG\sphericalangle+GCO\sphericalangle=(GAC\sphericalangle+QCB\sphericalangle)+OCG\sphericalangle=\\&=GCA\sphericalangle+GCB\sphericalangle=ACB\sphericalangle=90^\circ,\end{aligned}$$

hiszen GAC egyenlő szárú háromszög. Eszerint GC merőleges a GO sugárra. Ezt akartuk bizonyítani.

Kovács István (Budapest, I. István Gimn., II. o. t.)