I. megoldás. Hozzáadogatással könnyen kifejezhetjük az $1+2+\ldots+N=S_N$ összeget N első tíz természetes szám értékére:

$$\begin{array}{rcccccccccc} N= & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, \\ S_N= & 1, & 3, & 6, & 10, & 15, & 21, & 28, & 36, & 45, & 55. \end{array}$$

Az eddigi S_N értékek egyes helyi értékű jegyei között nem fordul elő 2, 4, 7 és 9, röviden: nincs ilyen végződésű S_N. Megmutatjuk, hogy tovább sem lép fel S_N-ben ilyen végződés. Ugyanis S_N-ből mindjárt S_{N+10}-et képezve 10 új tagot adunk hozzá, ezeknek a végződései között a 10-féle számjegy mindegyike pontosan egyszer lép fel, vagyis S_N végződéséhez $0+1+2+\ldots+8+9=45$-öt adunk hozzá. Így S_{N+10} végződése 5-tel nagyobbnak adódik S_N végződésénél, ha ez 5-ön aluli számjegy volt, ha pedig 5 vagy nagyobb volt, akkor 5-tel kisebbnek. Mármost a fenti négy hiányzó végződés éppen olyan két párba kapcsolható: 2 és 7, ill. 4 és 9, amelyek csak egymásból adódhatnának, N-ről $N+10$-re áttérve.

Ezzel beláttuk 72-re és 74-re végződő S_N lehetetlenségét és további 38 soha fel nem lépő kétjegyű végződést találtunk: $X2$, $X4$, $X7$, és $X9$, ahol X bármelyik számjegyet jelentheti.

Áttérve a hátra levő 73-as kétjegyű végződésre, látjuk, hogy a 3-as végződés előfordul $N=2$ esetében, továbbá meggondolásunk szerint $N=17$-nél, mert S_7 végződése 8 és $8-5=3$. A teljes érték

$$S_{17}=S_7+45+8\cdot 10=153$$

(ugyanis a hozzáadott tagok közül 8 egy-egy tízest is tartalmaz), ez sem 73-ra végződik.

Fenti meggondolásunkat egymás után kétszer alkalmazva S_{N+20} végződésében S_N végződése ismétlődik, hiszen így $2\cdot 45=90$-et adunk a végződéshez. Eszerint csak $20k+2$ és $20k+17$ alakú N-ekre lesz S_N végződése ismét 3 (k természetes szám). Mármost az S_N-hez hozzáadott 20 szám összege

$$\begin{gathered}(N+1)+(N+2)+(N+3)+\ldots+(N+19)+(N+20)= \\ =20N+(1+2+\ldots+20)=20N+210,\end{gathered}$$

és ez $N=20k+2$ esetén $400k+250$, ha pedig $N=20k+17$, akkor $400k+550$ alakú. Eszerint pedig mindkét esetben a 3-ra végződő S_N-ek kétjegyű végződésében 03 és 53 váltogatják egymást, tehát valóban nem lép fel a 73-as végződés.

Egyúttal azt is kaptuk, hogy nem lehet a végződés 13, 23, 33, 43, 63, 73, 83 és 93 sem. Hasonlóan adódik, hogy ha S_N egyjegyű végződése 8 (ti. $20k+7$ és $20k+12$ alakú N-ek esetében), akkor kétjegyű végződése csak 28 vagy 78 lehet, vagyis nem lehet 08, 18, 38, 48, 58, 68, 88 és 98.

Megállapításaink természetesen csak a tízes számrendszerre vonatkoznak.

II. megoldás. Könnyű belátni, hogy

$$S_N=\frac{N(N+1)}{2}, \tag{1}$$

vagyis az összeg megkapható úgy, hogy N-et szorozzuk a rá következő természetes számmal és a szorzatot osztjuk 2-vel. Ez ugyanis érvényes, ha $N=1$, és feltéve, hogy valamely természetes számra érvényes, akkor érvényes a rá következőre is:

$$S_{N+1}=S_N+(N+1)=\frac{N(N+1)}{2}+(N+1)=\frac{(N+1)(N|+2)}{2}.$$

Az (1) összefüggés jobb oldalát teljes négyzetté alakíthatjuk, 8-cal szorozva és 1-et hozzáadva:

$$1+8S_N=(2N+1)^2.$$

A bal oldal tehát egy páratlan szám négyzete. Ámde $S_N=100k+72$, $100k+73$ és $100k+74$ esetén $1+8S_N$ kétjegyű végződése 77, 85, ill. 93, ami nem lehet négyzetszám végződése. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

$1+8S_N$ egyjegyű végződése 7, ill. 3 minden olyan S_N-re, melynek 8-szorosa 6-ra, ill. 2-re végződik, vagyis ő maga 2-re, vagy 7-re, ill. 4-re vagy 9-re végződik. És mivel négyzetszám egyjegyű végződése sohasem 7, sem 3, azért S_N-nek 1-jegyű végződése sem lehet 2, 7, 4 és 9.

A 85 nem lehet négyzetszám végződése, de az 5 lehet, ekkor a kétjegyű végződés 25, tehát a szám $100k+25$ alakú, és itt k páros, ugyanis

$$(10m+5)^2=100m(m+1)+25,$$

és m, $m+1$ egyike páros. Mármost, ha

$$1+8S_N=200n+25,$$

akkor $S_N=25n+3$, és így S_N kétjegyű végződése 03, 28, 53 vagy 78. Mivel pedig minden 3-as és 8-as végű szám 8-szorosát 1-gyel növelve 5-re végződő számot kapunk, azért a 3-ra és 8-ra végződő, előbb fel nem sorolt kétjegyű számok nem léphetnek fel $1+2+\ldots+N$ alakú összeg utolsó két jegyében.

Ábrahám Zoltán (Nagykőrös, Arany J. Gimn., II. o. t.)