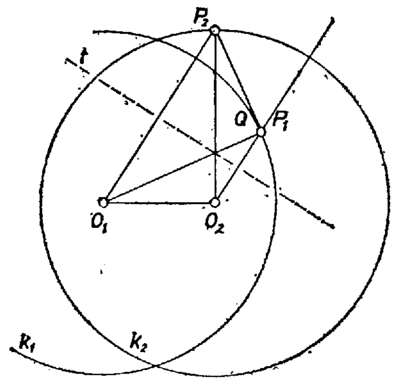
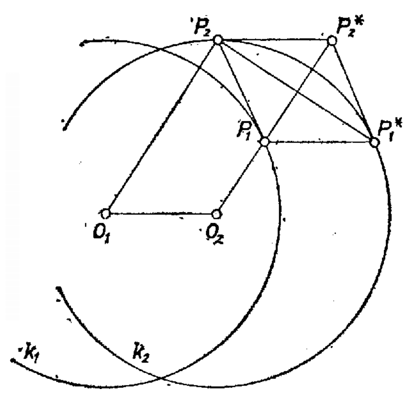
I. megoldás. A vizsgált metszéspontok mindig létrejönnek és egyértelműen meghatározottak, mert egy kör belső pontjából indított, tetszőleges irányú félegyenes pontosan egy pontban metszi a kört. A köröket jelöljük k_1, k_2-vel, középpontjaikat O_1, O_2-vel, a kerületükön keletkező metszéspontokat P_1, P_2-vel. A feladat szerint tehát az O_1P_2, O_2P_1 szakaszok párhuzamosak és megegyező irányúak.



1. ábra

Tükrözve az ábrát az O_1P_2 szakasz t felező merőlegesére O_1 és P_2 helyet cserél, O_2 képe legyen Q (1. ábra). A t egyenes elválasztja az O_1, P_2 pontokat, és mivel $O_2P_2 > O_1O_2$ (hiszen a középpontok távolsága kisebb, mint a körök sugara), O_2 a t-nek ugyanazon az oldalán van, mint O_1. Emiatt Q a t-nek P_2-t tartalmazó oldalán lesz, és az O_1P_2 és O_2Q szakaszok párhuzamosak és egyirányúak. A tükrözés miatt $O_1Q = P_2O_2$, tehát Q rajta van k_1-en, és ugyancsak rajta van az O_2-ből induló, és az O_1-ből P_2, felé haladó félegyenessel párhuzamos félegyenesen is, Q tehát azonos P_1-gyel. Így – ugyancsak a tükrözés miatt – $P_1P_2 = QP_2 = O_2O_1$, ami valóban független a félegyenesek irányának a megválasztásától. Ezt kellett bizonyítanunk.

II. megoldás. Toljuk át k_1-et k_2-be, így az O_1P_2 félegyenes az O_2P_1-be jut, és P_1 új, P_1^* helyzete k_2-n van, P_2-nek új, P_2^* helyzete pedig O_2P_1-en, és $P_2P_2^*P_1^*P_2^*$ paralelogramma. Ezért $P_1P_2^*$ átlója felezi a $P_2P_1^*$ átlót (ami k_2-nek húrja), másrészt átmegy O_2-n, tehát merőleges rá. Így a négyszög rombusz, $P_2P_1 = P_2P_2^* = O_1O_2$, állandó (2. ábra).



2. ábra

Ha valamelyik félegyenes átmegy a másik kör középpontján, pl. O_1P_2 az O_2-n, akkor rombuszunk elfajul. Ekkor

$$P_1P_2 = O_1O_2 + O_2P_2 - O_1P_1 = O_1O_2.$$

Győri Ervin (Kaposvár, Táncsics M. Gimn., II. o. t.)