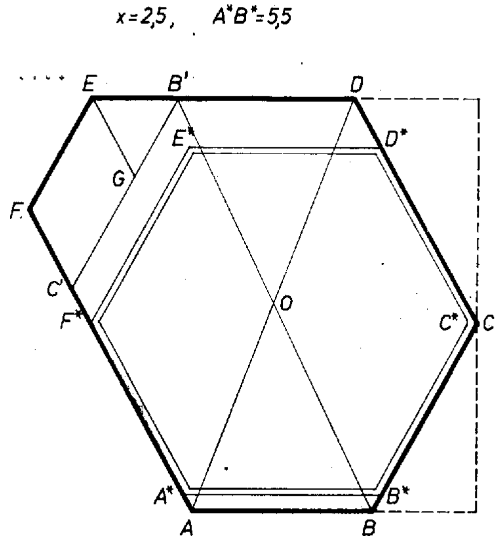
Legyen a kérdéses hatszög $ABCDEF = H$ úgy, hogy $AB = 5, BC = 6, \ldots, FA = 7 + x$. Tükrözzük a rögzített oldalakból álló $ABCD$ törött vonalat az AD szakasz O felezőpontjára a $DB'C'A$ helyzetbe, így B', C' a DE, ill. AF félegyenesen lesz és $B'C' \parallel CB \parallel EF$, vagyis a $B'C'FE$ négyszög trapéz, hacsak $x \neq 0$, és szárainak hossza $|DE - DB'| = |AF - AC'| = |x|$.



Húzzunk továbbá párhuzamost E-n át AF-fel, és messe ez a $B'C'$ egyenest G-ben. Így $C'FEG$ paralelogramma, $B'G = |B'C' - EF| = |x| = C'F = GE = B'E$, tehát $EB'G$ egyenlő oldalú háromszög, hacsak $x \neq 0$. így oldalegyenesei páronként $60°$-os szögeket zárnak be, és ugyanez áll H oldalegyeneseire. Mivel pedig H konvex, csak a szomszédos oldalegyenesek közti külső szög lehet $60°$, tehát H mindegyik szöge $120°$, mint a szabályos hatszög szögei.

Ebből nyilvánvaló, hogy a H-ból egy darabban kivágott S szabályos hatszög úgy lesz a legnagyobb, ha oldalait a H oldalain, ill. ezekkel párhuzamosan helyezzük el, és S két szemben fekvő oldalának távolsága – röviden: S szélessége – legfeljebb annyi, mint a H párhuzamos oldalpárjai között adódó 3-féle távolság legkisebbike.

Mármost az AB és DE egyenesek távolsága annyi, mint a C csúcs tőlük mért távolságainak összege. Ezeket megadja a $CB = 6$, ill. $CD = 7$ oldalú szabályos háromszög magassága, így összegük $13\sqrt{3}/2$. Hasonlóan AF és CD távolsága $11\sqrt{3}/2$, kisebb az előbbinél, végül BC és EF távolsága $(12 + x)\sqrt{3}/2$, tehát S-nek d szélessége nem nagyobb, mint az utóbbi két távolság kisebbike.

Mármost

$$\frac{(12 + x)\sqrt{3}}{2} \gtreqless \frac{11\sqrt{3}}{2}, \quad \text{azaz} \quad 12 + x \gtreqless 11$$

aszerint, hogy

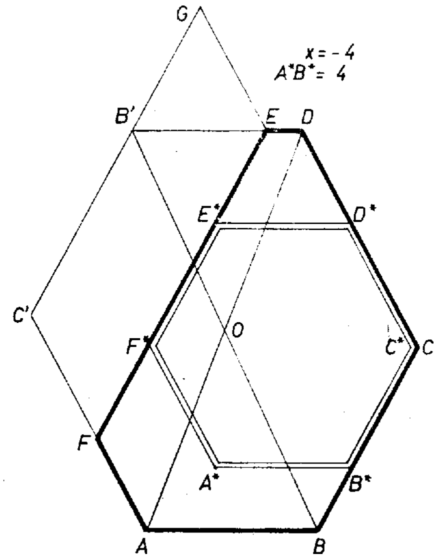
$$-1 < x < 6,\ x \neq 0; \qquad x = -1; \qquad -5 < x < -1.$$

Így $\underbrace{\text{pedig } S \text{ oldalhossza rendre}}$

$$\frac{11}{2}, \quad \text{ill.} \quad \frac{12 + x}{2},$$

megmutatjuk ugyanis, hogy S-nek H-ba való alkalmas beillesztésével ez az oldalhossz el is érhető.

Az első esetben $A^*B^*C^*D^*E^*F^* = S$-nek $2 - 2$ csúcsát illesztjük az AF, CD egyenespárra, éspedig C^*-ot C-be. Így B^* a CB oldalon lesz. $BB^* = 1/2$, és könnyen belátható, hogy A^* az AF oldalon lesz, $AA^* = 1/2$, tehát $A^*F = (7 + x) - 1/2 = x + 13/2 \geqq 11/2$, F^* is AF-en lesz, $x = -1$ esetén éppen F-ben. Másrészt D^* a CD oldalon van, és $CD^* = 11/2 < CD$, így pedig az oldalak párhuzamossága és H konvexsége miatt E^* is a H-ban van.



A második esetben a BC, EF egyenespárra helyezzük a B^*C^*, E^*F^* oldalakat, C^*-ot ismét C-be. Így $D^*D = (2-x)/2$, és $B^*B = -x/2$ (ami > 0), D^*E^* és B^*A^* a DE, BA párhuzamosok között halad, $E^*F^* = (6-x) - EE^* = (6-x) - DD^* = (10-x)/2 < (12+x)/2$, tehát F^* is E és F közé jut; úgy pedig A^* is H-ban van.

$x = 0$ esetén az $EB'G$ háromszög ponttá zsugorodik, H szögeiről és S oldaláról semmit sem mondhatunk. Ekkor H centrálszimmetrikus, bármelyik két szemben fekvő oldala tetszés szerinti közel hozható egymáshoz.

Ezzel vizsgálatunkat befejeztük.

Czédli Gábor (Baja, III. Béla Gimn., II. o. t.)

Pataki Béla (Budapest, I. István Gimn., I. o. t.)