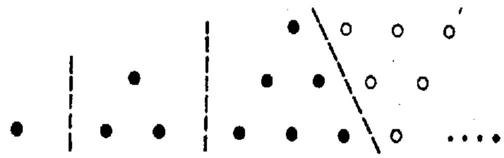
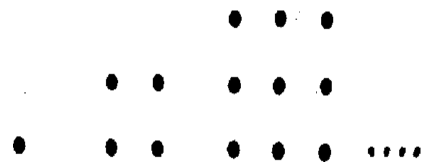


1. ábra



2. ábra

Az 1. ábra szerint a háromszöghalmaz és tükörképe paralelogrammát ad, melyben a sorok száma az n index, a (ferde, de merőlegesre is állítható) oszlopok száma 1-gyel nagyobb, a paralelogramma pontjainak száma tehát $n(n+1)$. így az n indexű háromszögszám és négyzetszám (más kifejezéssel trianguláris szám, ill. kvadrátszám):

$$T_n = \frac{(n+1)}{2}, \qquad Q_n = n^2.$$

Másrészt az előírt számjegybeiktatásokkal kapott szám jegyeinek száma $2k+3$, és a szám így alakítható:

$$S_k = 5\overbrace{9}^{1}\overbrace{9}^{2}\ldots\overbrace{9}^{k} \cdot 10^{k+2} + 5\cdot 10^{k+1} + 1 = \left(6\cdot 10^k - 1\right)\cdot 10^{k+2} + 5\cdot 10^{k+1} + 1,$$

eszerint azt kell belátnunk, hogy $k = 0, 1, 2, \ldots$ esetén mindig van olyan pozitív egész n, amelyre

$$n^2 + \frac{n(n+1)}{2} = S_k,$$

azaz

$$3n^2 + n - 2S_k = 0.$$

Valóban, az egyenlet diszkriminánsa

$$\begin{aligned} 1 + 24S_k &= \left(144\cdot 10^k - 24\right)\cdot 10^{k+2} + 12\cdot 10^{k+2} + 25 = \\ &= 12^2\cdot 10^{2k+2} - 120\cdot 10^{k+1} + 25 = \left(12\cdot 10^{k+1} - 5\right)^2, \end{aligned}$$

teljes négyzet, és egyenletünk pozitív gyöke

$$n_2 = \frac{-1 + \left(12\cdot 10^{k+1} - 5\right)}{6} = 2\cdot 10^{k+1} - 1,$$

egész szám (n_1 negatív, hiszen a két gyök szorzata $-2S_k/3 < 0$).

Pl. $k = 0$ és 1 esetén az index 19, ill. 199, és valóban

$$19^2 + \frac{19\cdot 20}{2} = 551, \qquad 199^2 + \frac{199\cdot 200}{2} = 59\,501.$$