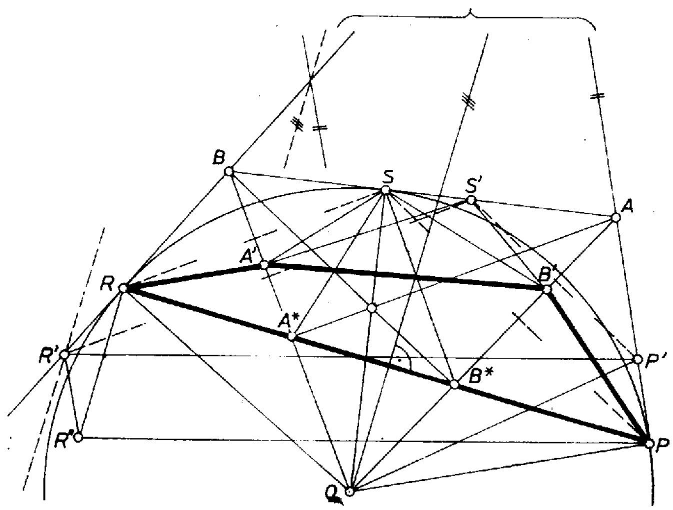
I. S-et először a kör rövidebb PR ívén vesszük fel. Legyen egy az ABO háromszögbe beírt háromszögnek az AB oldalszakaszon levő csúcsa mindjárt S, a BO, OA szakaszon A', ill. B' (1. ábra).



1. ábra

E háromszög kerülete egyenlő a $PB'A'R$ töröttvonal hosszával. Ugyanis P és S, mint az A-ból húzott érintők érintési pontjai, egymás tükörképei OA-ra mint tengelyre nézve, és ugyanígy R, S az OB tengelyre szimmetrikus pontpár, tehát

$$SB' + B'A' + A'S = PB' + B'A' + A'R.$$

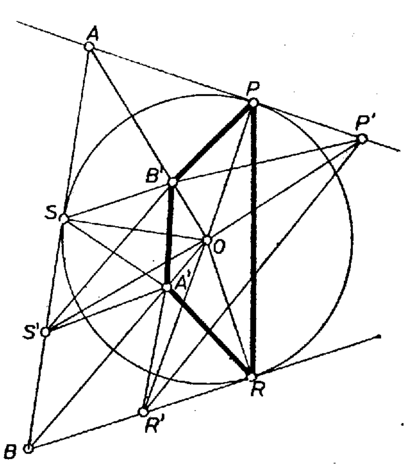
Ez valóban nem lehet kisebb a töröttvonal P, R végpontjai közti szakasznál, egyenlő is csak akkor vele, ha A', B' szerepére azt az A^*, B^* pontját választjuk az OB, ill. OA szakasznak, amelyet a PR szakasz metsz ki belőle.

S helyén az AB oldalszakasz más, S' pontját véve az $S'A'B'$ háromszög kerülete az előzőkhöz hasonlóan egyenlő annak a 3 darabból álló törött vonalnak a hosszával, melynek kezdő és végpontja S'-nek az OA, OB tengelyre vett P', ill. R' tükörképe, közbülső töréspontjai pedig B' és A'. Az ilyen törött vonalak hossza hasonlóan nem kisebb a $P'R'$ szakasznál, így elég erről az utóbbiról belátnunk, hogy nem kisebb PR-nél.

Toljuk át $P'R'$-t a PR'' helyzetbe. A keletkezett PRR'' háromszögről mindjárt belátjuk, hogy R-nél derékszögű, ebből adódik, hogy $PR < PR'' = P'R'$. Valóban, $R'R'' = P'P = S'S = R'R$, így $R'RR''$ egyenlő szárú háromszög, RR'' párhuzamos az RR' és RR'' irányok közti szög felezőjével, ez a szög pedig egyállású a P-ben, R-ben húzott érintők közti szöggel, aminek a felezője merőleges PR-re, tehát $RR'' \perp RP$.

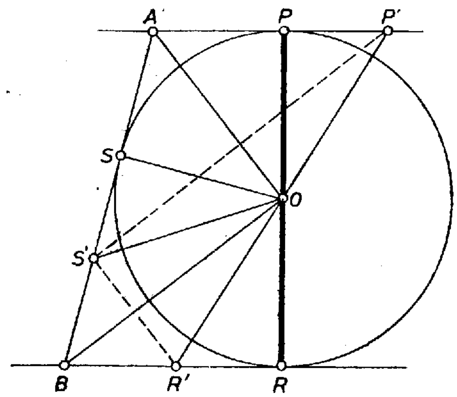
Az S-re tett korlátozás alapján $POR\sphericalangle < 180°$, így a felhasznált háromszögek valóban léteznek, és létezik a mondott A^*, B^* pont, hiszen a PR egyenes elválasztja O-t P-től. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

II. Ha S-et a nagyobbik PR köríven választjuk, fenti meggondolásunk érvényes marad, annyiban azonban módosul, hogy az AOB háromszögbe beírt $SA'B'$, ill. $S'A'B'$ háromszögek között nem létezik a PR húr, ill. a $P'R'$ szakasz hosszával egyenlő kerületű háromszög, hiszen az OP (ill. OP') félegyenest S-en (ill. S'-n) át az OR (ill. OR') félegyenesbe 180°-nál nagyobb elfordulás viszi át, PR-nek (ill. $P'R'$-nek) nincs pontja az OAB háromszög kerületén (2. ábra).



2. ábra

III. Akkor is érvényes eredeti meggondolásunk, ha P és R eleve a kör egy átmérőjének végpontjai voltak. Ekkor, bár PR (ill. $P'R'$) átmegy O-n, a fenti A^*, B^* egybeesik O-val, az SA^*B^* már elfajult háromszög lenne, ekkor – amint a **II.** esetben is – minden valódi beírt háromszög kerülete határozottan nagyobb a PR szakasznál (3. ábra).



3. ábra

Megjegyzés. Bizonyításunk lényegében megegyezik *Fejér Lipót* magyar matematikusnak (1880–1959) azzal a híres, egyszerű bizonyításával, [1] amellyel megmutatta, hogy a hegyesszögű háromszögbe beírt háromszögek között van legkisebb területű és ez a háromszög talpponti háromszöge. – Nyilvánvaló ugyanis, hogy OS az OAB háromszög magasságvonala, megmutatjuk még, hogy AA^* is merőleges OB-re. Az OPR egyenlő szárú háromszögben $POR\sphericalangle = POA\sphericalangle + AOB\sphericalangle + BOR\sphericalangle = AOS\sphericalangle + AOB\sphericalangle + SOB\sphericalangle = 2AOB\sphericalangle$, ezért $PRO\sphericalangle = 90^\circ - AOB\sphericalangle$, és így $PRB\sphericalangle = A^*RB\sphericalangle = A^*SB\sphericalangle = AOB\sphericalangle = AOA^*\sphericalangle$. Így pedig O, A, S, A^* egy körön vannak, és $OS \perp AS$ miatt e körben OA átmérő, ennélfogva $OA^*A\sphericalangle = 90^\circ$. Ugyanígy $BB^* \perp OA$.

[1] Lásd pl.:*H. Rademacher – O. Toeplitz:* Számokról és alakzatokról, 2. kiadás, Középiskolai Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1954, 26–30. o.