

Olyan egész  $A, B, C, D$  és  $a, b, c, d$  együtthatókat kell keresnünk, amelyekre

$$x^6 - x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - x + 1 = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)(ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

azonosság, vagyis a jobb oldali beszorzás után  $x$  két oldali hatványainak együtthatói rendre egyenlők.  $x^6$  együtthatóiból  $Aa = 1$ , ez csak  $A = a = 1$  és  $A = a = -1$  mellett lehetséges. Az utóbbi azonban a két tényező-polinom mindegyikének  $(-1)$ -gyel való szorzása, vagyis nem lényeges átalakítás útján visszavezethető az előbbire, ezért mellőzhető. Legyen tehát  $A = a = 1$ . Így  $x^5, x^4, \dots, x$  együtthatóiból és az állandókból rendre a következő egyenletrendszert kapjuk az együtthatókra:

$$\begin{aligned} (1) \quad & B + b = -1, \\ (2) \quad & C + Bb + c = 1, \\ (3) \quad & D + Cb + Bc + d = -1, \\ (4) \quad & Db + Cc + Bd = -1, \\ (5) \quad & Dc + Cd = -1, \\ (6) \quad & Dd = 1. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből  $D = d = \pm 1$ , így  $d^2 = 1$ ; ennek alapján (5)-öt  $d$ -vel szorozva

$$(5a) \quad C + c = -d$$

és így (2)-ből

$$(2a) \quad Bb = 1 + d.$$

Vonjuk le (1) négyzetéből (2a) kétszeresét:

$$(7) \quad B^2 + b^2 = -1 - 2d.$$

Ez csak  $d = -1$ -re nem negatív. Ekkor  $B$  és  $b$  közül az egyik 0, a másik (1) alapján  $-1$ . Mivel  $A = a, D = d$  folytán  $b$  és  $B$  felcserélése csak a két tényező felcserélését jelenti, feltehetjük, hogy  $b = 0, B = -1$ . Ezeket felhasználva (3)-ból  $c = -1$  és (5a)-ból  $C = 2$ . Ezekkel az értékekkel (4) is teljesül, így a keresett felbontás

$$(x^3 - x^2 + 2x - 1)(x^3 - x - 1).$$

*Próhle Tamás* (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)