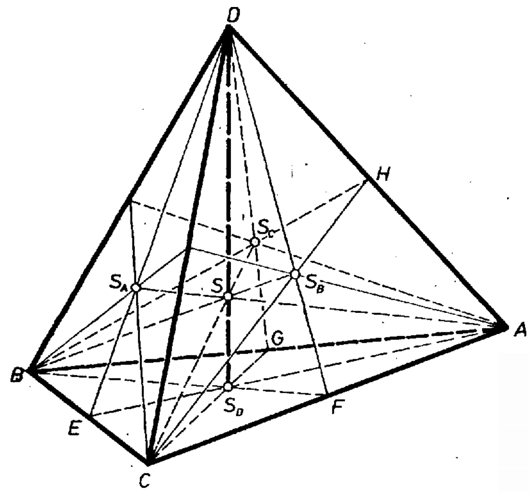
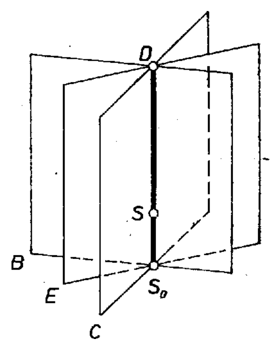
I. Mind a hat metsző sík átmegy az $ABCD$ tetraéder S súlypontján. Legyen ugyanis az ABC alaplap BC, CA, AB élének felezőpontja rendre E, F, G (1. ábra), ekkor a DAE, DBF, DCG metszősík az alapháromszöget ennek AE, BF, ill. CG súlyvonalában metszi, ezeknek közös pontja az ABC háromszög S_D súlypontja, tehát a D-ben összefutó 3 élre az előírás szerint fektetett síkok a DS_D egyenesben, a tetraéder súlyvonalában metszik egymást.



1. ábra

Így e 3 sík a teret és a tetraédert 6 részre osztja (2. ábra).



2. ábra

Ugyanez kimondható a tetraéder bármelyik másik csúcsában összefutó élhármasra az előírás szerint fektetett síkhármasra és bármelyik két súlyvonal, pl. AS_A, DS_D, mint a DAE sík egyenesei, metszi egymást a tetraéder súlypontjában.

A tetraédert a 6 él és az S pont által meghatározott 6 háromszög négy rész tetraéderre vágja azét, ezeknek egy-egy lapja az eredeti tetraéder egyik lapja, az S-ben összefutó 3 lapja pedig a metsző síkoknak része. Így egy-egy ilyen rész-tetraédert csak a további 3 metsző sík darabol tovább. Mármost az $SABC$ rész-tetraédert a DAE, DBF, DCG síkok ugyanúgy 6 részre vágják szét, amint ezt az eredeti tetraéderre már kimondtuk. Ugyanez áll mindegyik részre, így a 6 metsző sík a tetraédert 24 részre darabolja szét.

Eddig nem használtuk fel a kiindulási tetraéder szabályos voltát, így megállapításaink minden tetraéderre érvényesek.

II. Tetraéderünk szabályos volta alapján $DA = DB = DC$, ezért D-nek az ABC lapon levő vetülete is egyenlő távolságra van A, B, C mindegyikétől, vagyis azonos az ABC háromszög köré írt középpontjával, ami szabályos háromszögben egyszersmind a súlypont is, tehát a vetület azonos S_D-vel. Így DS_D merőleges az ABC síkra, a DS_D tengely körüli 120°-os elfordítás a síkot és az ABC háromszöget önmagába viszi át. Ez az elfordítás az $SDAB$, $SDBC$, $SDCA$ tetraédereket is egymásba viszi át, ezek tehát egybevágók. A tetraéder egy másik súlyvonala körüli elfordítás adja, hogy $SABC$ is egybevágó velük.

Az előbbi elfordításokat az $SABC$ tetraéder 6 részére alkalmazva kapjuk, hogy az SS_DAG, SS_DBE és SS_DCF, valamint az SS_DAF, SS_DBG és SS_DCE részek egymásba átvihetők, úgyszintén a fenti 3 tetraédernegyed megfelelő 3–3 részébe is, vagyis a feldarabolás 12–12 része egymásba alkalmas elmozdítással mindenesetre átvihető.

Az előbbi két részhármas darabjai egymásba tükrözéssel átvihetők, pl. SS_DAG az SS_DAF-be a DAE síkon való tükrözéssel, hiszen ez B-t és C-t (és így F-et és G-t is) egymásba viszi át, tehát szimmetriasíkja az eredeti tetraédernek. Így pedig a 24 rész bármelyike átvihető a másik helyére, tehát válaszunk a *b)* kérdésre: 23 rész.

Megmutatjuk viszont, hogy pl. az SS_DCF darab nem vihető át elmozdítással SS_DAF-be. Ugyanis legrövidebb élük SS_D, a rá következő nagyobb S_DF, mert mint könnyen belátható, $SD = 3 \cdot SS_D$, így

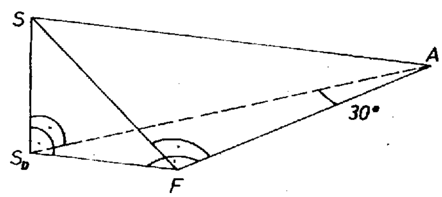
$$SS_D = \frac{DS_D}{4} < \frac{DF}{4} < \frac{DF}{3} = S_BF = S_DF,$$

továbbá

$$SS_DF\sphericalangle = S_DFA\sphericalangle = SS_DA\sphericalangle = SFA\sphericalangle = 90^\circ \quad \text{és} \quad S_DAF\sphericalangle = 30^\circ$$

(3. ábra) alapján

$$S_DF < SF < SA \quad \text{és} \quad S_DF < FA < S_DA.$$



3. ábra

Így a kívánt átvitelben az SS_DF derékszögű háromszöglap csak önmagának felelhetne meg. Ámde a darabok ezen lapja (kívülről nézve) ellentétes körüljárású. Ezzel beláttuk állításunkat.

Eszerint az *a)* kérdésre a válasz: 11 rész.

Megjegyzés. A II. részben felhasznált $SD = 3 \cdot SS_D$ egyenlőség abból adódik, hogy $EA = 3 \cdot ES_D$, $ED = 3 \cdot ES_A$ alapján, $S_AS_D \| DA$, és $DA = 3S_AS_D$, és az ADS_AS_D trapézból $SD : SS_D = DA : S_DS_A = 3$.