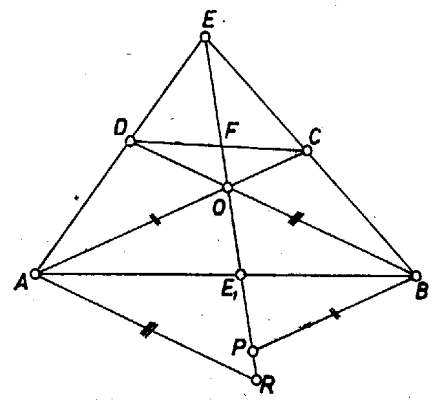
Előrebocsátunk egy segédtételt, amelyet az alábbi megoldások mindegyikében felhasználunk.

Segédtétel: Az $ABCD$ trapéz ($AB||CD$) BC és AD szárainak és AC, BD átlóinak metszéspontját (E-t és O-t) összekötő egyenes felezi az AB és CD oldalt.

Megfordítva, ha egy $ABCD$ négyszögben E és O létrejön, és EO felezi az AB oldalt, akkor $AB||CD$ (vagyis a négyszög trapéz).

Bizonyítás. Messék egymást a (konvex) $ABCD$ négyszög BC és AD oldalai a C-n, ill. D-n túli meghosszabbítás E pontjában, átlói az O pontban (1. ábra).



1. ábra

Húzzunk párhuzamost B-ből AC-vel, A-ból BD-vel, messék ezek az EO egyenest a P, ill. R pontban. Ekkor a párhuzamos szelők tétele szerint

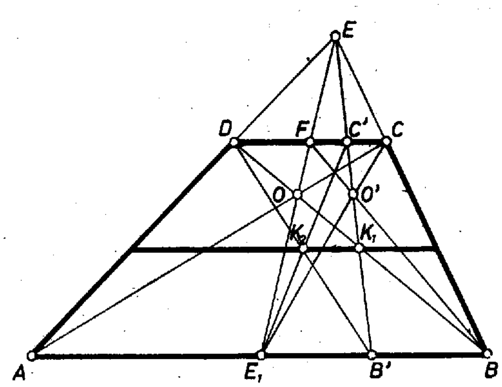
$$\frac{AD}{DE}=\frac{RO}{OE}, \qquad \frac{BC}{CE}=\frac{PO}{OE}. \tag{1}$$

Ha mármost a négyszög trapéz, akkor a bal oldali arányok egyenlők, így $PO=RO$, vagyis P és R egybeesik. Eszerint $AOBP$ paralelogramma, és átlóinak E_1 metszéspontja felezi őket. Mivel $CD||AB$, az előbbi egyenes és EO ($=EE_1$) F metszéspontja is felezi CD-t.

Tegyük most azt fel, hogy EO és AB metszéspontja, E_1, felezi AB-t. O-nak E_1-re vonatkozó P tükörképe is EO-n van, és $AOBP$ paralelogramma, tehát a P és R pont egybeesik, az (1) alatti jobb oldalak megegyeznek, tehát a bal oldaliak is, ez azonban csak úgy lehetséges, ha $DC||AB$. Most már a bizonyítás első része adja, hogy F is felezi CD-t.

Ha F-ről tesszük fel, hogy felezi CD-t, akkor C-ből és D-ből kell az átlókkal párhuzamos CP és DR egyenest húzni.

I. megoldás. Segédtételünk első része alapján megszerkeszthetjük csak vonalzó segítségével az AB, CD szakaszok E_1 és F felezőpontját, majd az E_1B és CF szakaszok B' és C' felezőpontját (2. ábra).



2. ábra

Így

$$BB'=B'E_1=\frac{1}{4}AB=\frac{3}{4}DC=DC',$$

tehát $BB'DC'$ és $B'E_1DC'$ paralelogramma, átlóik metszéspontja a keresett középvonal egy-egy pontja.

Ennek alapján a szerkesztés a következő egyenesek és metszéspontok megszerkesztésével történhet: AD és BC metszéspontja E, AC és BD-é O, EO metszi AB-t és CD-t E_1-ben és F-ben. A BF és CE_1-nek O' metszéspontját E-vel összekötő egyenes metszi ki B'-t és C'-t és egyben BD-ből az első paralelogramma K_1 középpontját. Ezt összekötve DB' és E_1C'-nek K_2 metszéspontjával, kapjuk a középvonalat.

Fürst Éva (Tatabánya, Árpád Gimn., I. o. t.)

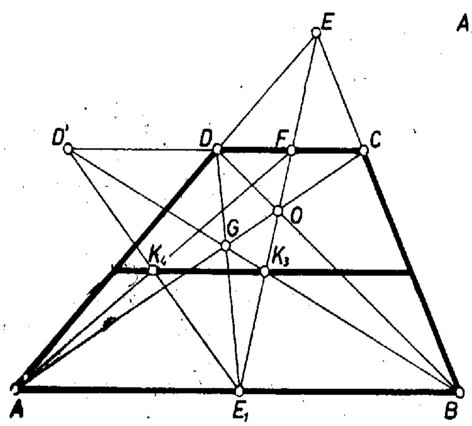
II. megoldás. Úgy is hozhatunk létre paralelogrammákat, hogy E_1 és F megszerkesztése után a segédtétel első része alapján CD-t megduplázzuk.

E_1 és F megszerkesztése után húzzuk meg DE_1-et, majd az AC-vel való G metszéspontját B-vel összekötő egyenest metsszük el CD meghosszabbításával D'-ben (3. ábra). Az $ABCD'$ trapéz szárainak és átlóinak metszéspontját összekötő egyenes felezi AB-t, vagyis átmegy E_1-en, így azonos az E_1-et az átlók G metszéspontjával összekötő egyenessel. Ez nem más, mint E_1D. Tehát D felezi CD'-t, s így

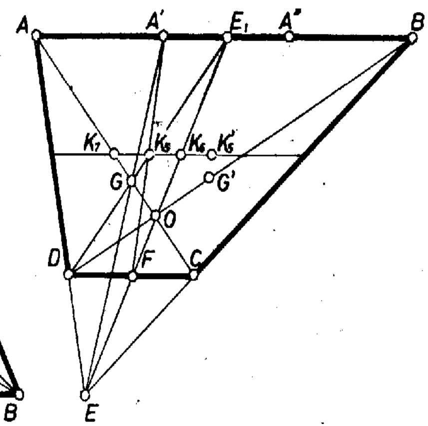
$$D'F = D'D + DF = (3/2) \cdot CD = (1/2) \cdot AB = AE_1 = E_1B.$$

Eszerint $AD'FE_1$ és $E_1D'FB$ paralelogramma. Az utóbbinak a középpontja, BD'-nek és E_1F-nek metszéspontja, már rendelkezésre is áll. AF és $D'E_1$ metszéspontja, K_4, szolgáltatja a középvonal egy másik pontját.

Fodor Péter (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o. t.)



3. ábra



4. ábra

III. megoldás. Két paralelogrammát szerkeszthetünk a segédtétel második részének, valamint annak felhasználásával is, hogy O felezi az EE_1 szakaszt. Valóban, egyrészt EF az EE_1 harmadrésze, tehát FE_1 a $2/3$ része; másrészt OF az OE_1-nek harmada, tehát FE_1-nek negyede, OE_1 pedig a háromnegyede, tehát EE_1-nek a fele, amint állítottuk.

Ennek alapján a következőképpen járhatunk el: az előző megoldások első 5 egyenesének a meghúzása után megrajzoljuk DE_1-et; ennek az AO-val való G metszéspontját E-vel összekötő egyenes messe AB-t A'-ben (4. ábra).

DEE_1A' trapéz, mert ED és E_1A' oldalainak és az átlóknak metszéspontját, A-t és G-t összekötő egyenes felezi EE_1-et. Ekkor viszont DFE_1A' paralelogramma, így FA' kimetszi E_1D-ből a középvonal egy K_5 pontját. Ugyanígy szerkeszthetjük – D helyett C-t és A helyett B-t véve – a K_5' pontot. A kettő összekötő egyenese a keresett középvonal.

Bendzsel Miklós (Budapest, Piarista Gimn., II. o. t.)

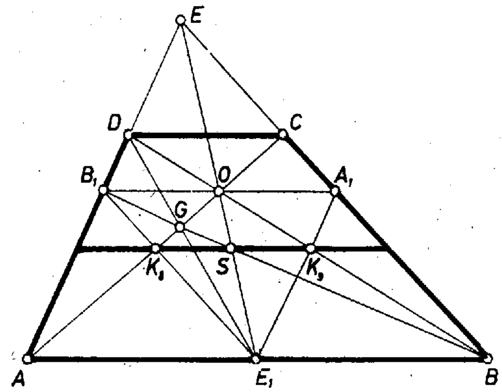
Megjegyzés. Második paralelogramma szerkesztése nem is szükséges, hiszen $CE_1A'F$ is, $ADCA'$ is paralelogramma, mert

$$E_1A' = FD = CF = (1/2) \cdot CD = (1/6) \cdot AB, \text{ és így}$$
$$AA' = AB - AE_1 - E_1A' = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) \cdot AB = (1/3) \cdot AB = CD.$$

A' megszerkesztése után tehát akár CA'-vel E_1F-ből, akár DA'-vel AC-ből kimetszhetjük a középvonal egy-egy pontját (K_6, ill. K_7).

IV. megoldás. Láttuk, hogy O felezi az EE_1 szakaszt. *Ismert ponton át a felezőpontjával együtt ismert AB szakasszal* – mint majd belátjuk – *párhuzamost tudunk szerkeszteni kizárólag egyenes vonalzó használatával.* O-n át AB-vel párhuzamost húzva, ez az ABE háromszög középvonala. Ennek ismeretében a másik két középvonal is meghúzható, és ezek felezik AC-t és BD-t. A két felezőpont a középvonal egy-egy pontja.

Ennek alapján a szerkesztés az E_1 pont megszerkesztése után: meghúzzuk DE_1 et, az AO-val való G metszéspontját B-vel összekötő egyenes messe AE-t B_1-ben (5. ábra).



5. ábra

Az $ABOB_1$ négyszög AB_1 és BO oldalainak D metszéspontját az átlók G metszéspontjával összekötő egyenes DE_1, felezi AB-t. Így a segédtétel második része szerint $OB_1||AB$, B_1 felezi AE-t, ennélfogva a B_1O egyenesnek BC-vel való A_1 metszéspontja felezi BE-t. Így E_1B_1, E_1A_1 az ABE háromszög másik két középvonala, ezért AC-t és BD-t ezek K_8, K_9 felezőpontjában metszi, tehát K_8K_9 az $ABCD$ trapéz keresett középvonalának egyenese.

Megjegyzések. 1. A_1 és K_9 megszerkesztése megtakarítható, ha észrevesszük, hogy trapézunk középvonalának hossza $(AB+CD)/2 = 2CD = (2/3)\cdot AB$, így E-től $2/3$ akkora távolságban van, mint a trapéz AB alapja, tehát átmegy az $ABE\triangle S$ súlypontján, ami pedig EE_1 és BB_1 metszéspontjaként már rendelkezésre áll.

2. S-et – ugyanezen egyenesek metszéspontjaként – már a II. és a III. megoldásban is említettük, K_3, ill. K_6 jelöléssel. K_9-et viszont az I. megoldásban – K_1 jelöléssel – egy másik egyenessel metszettük ki BD-ből. A fenti 4 megoldást egy ábrán végrehajtva számos további efféle összefüggést vehetünk észre, amelyeket kombinálva további megoldásokat kaphatunk. Megoldás építhető pl. arra a tényre is, hogy ($EO = OE_1$ miatt) a trapéz O-ra vonatkozó tükörképében AB képe átmegy E-n, CD képe a középvonalon van, a legutóbbi K_8K_9 szakasz. Az I–III. megoldások eredményei tekinthetők egy-egy olyan háromszög középvonala szerkesztésének is, amelynek egy oldala a trapéz egyik alapján fekszik, harmadik csúcsa pedig a másik alapján, pl. K_1K_2 a $BB'D$ és $B'C'D$ háromszög középvonala.

3. Többen felhasználták, hogy bármely trapézban az átlók metszéspontján át az alapokkal párhuzamosan húzott egyenesből a szárak közé eső szakasz hossza a két alap harmonikus középarányosa. [1] Ez a fentieket kissé meghaladó méretű számítást igényel.

[1] Vö. K. M. L. 37 (1968) 70. o.; továbbá 1232. gyakorlat.