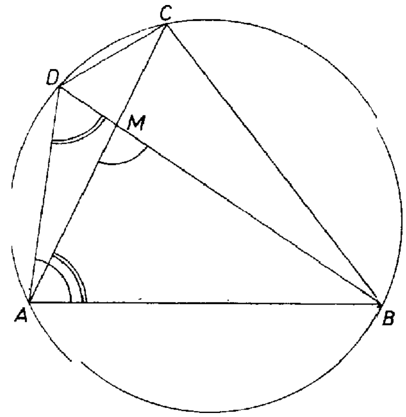
I. megoldás. I. Négyszögön önmagát nem metsző (nem hurkolt) négyszöget értve a húrnégyszög konvex. Legyen az átlók metszéspontja M, a húrnégyszög csúcsait pedig úgy jelöljük A, B, C, D-vel, hogy az A-nál levő szög egyenlő legyen az átlók közti egyik szöggel, az A-n át nem menő átlónak pedig az a végpontja legyen B (a másik D), amelyikre

$$AMB\sphericalangle = BAD\sphericalangle. \tag{1}$$



Az előbbi szög az AMD háromszög külső szöge, így

$$AMB\sphericalangle = ADM\sphericalangle + DAM\sphericalangle. \tag{2}$$

Ekkor azonban

$$ADM\sphericalangle = ADB\sphericalangle = BAM\sphericalangle = BAC\sphericalangle, \tag{3}$$

mert ezek a DAM szöget egyenlő szögekké egészítik ki. Ezek viszont az AB, ill. a BC szomszédos oldalak látószögei a körben, tehát

$$AB = BC. \tag{4}$$

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

II. Érvényes a tétel következő megfordítása: *ha egy húrnégyszög két szomszédos oldala egyenlő, akkor ezek nem közös végpontjainál levő két szög egyenlő az állók közti egyik-egyik szöggel.*

Valóban – a fenti jelölésekkel – (2) mindig fennáll és feltétel szerint pl. (4). Utóbbiból következik, hogy az ABC egyenlő szárú háromszögben

$$ACB\sphericalangle = CAB\sphericalangle. \tag{5}$$

Másrészt húrnégyszögről van szó, D és C az AB oldalnak ugyanazon az oldalán van, így mint ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek

$$ACB\sphericalangle = ADB\sphericalangle. \tag{6}$$

Az (5) és (6) jobb oldalán álló szögek egyenlők, vagyis teljesül (3). Ezek a szögek viszont a $DAM\sphericalangle$-et az (1) bal, ill. jobb oldalán álló szöggé egészítik ki, így fennáll (1).

(1)-ből viszont következik a $CMB\sphericalangle = BCD\sphericalangle$ egyenlőség is, mert ezek a szögek az (1) bal oldalán, ill. a húrnégyszög tulajdonsága szerint a jobb oldalon levő szöget 180°-ra egészítik ki.

Kelemen Imre (Eger, Gárdonyi G. Gimn., I. o. t.)
Hegyi Ferenc (Székesfehérvár, Teleki B. Gimn., I. o. t.)

Megjegyzés. Érvényes az állítás következő, kevésbé kézenfekvő megfordítása is: *ha egy konvex négyszög két szomszédos oldala egyenlő és ezek egyikének nem közös végpontjában a négyszög szöge egyenlő ezen oldalnak az átlók metszéspontjából való látószögével, akkor a négyszög húrnégyszög.* Azaz, ha fennáll (1) és (4), akkor (6)-ra akarunk következtetni. Azonban (1)-ből (2) alapján következik (3), mint I-ben, és az ABC háromszög egyenlő szárú volta miatt fennáll (5). Ezekből pedig következik (6). Mivel a négyszög konvex, így valóban húrnégyszög.

Angyal József (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Legyen ismét $BAD\sphericalangle = BMA\sphericalangle$. BAD és BMA hasonló háromszögek, mert B-nél levő szögük közös, így

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BA}{BM},$$

a BCD és BMC háromszögekben pedig $BCD\sphericalangle = 180^\circ - BAD\sphericalangle = 180^\circ - BMA\sphericalangle = BMC\sphericalangle$, ezek is hasonlók, tehát

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{BM},$$

és e két egyenlőségből $BA = BC$.

Ha viszont $BAD\sphericalangle + BCD\sphericalangle = 180^\circ$ és $BA = BC$, akkor egyszersmind $BDA\sphericalangle = BAC\sphericalangle = BAM\sphericalangle$, tehát a B-nél közös szöggel bíró BAD és BMA háromszögek harmadik szögei is egyenlők: $BAD\sphericalangle = BMA\sphericalangle$, vagyis a tétel ezen megfordítása is érvényes.

Pataki Béla (Budapest, I. István Gimn., I. o. t.)