

I. megoldás. A kívánt azonosság akkor és csak akkor teljesül, ha a jobb oldalon beszorozva és x hatványai szerint rendezve x ugyanazon kitevős hatványainak együtthatói a két oldalon egyenlők:

$$\begin{aligned}(2) \quad & -a = -a - b - c, \\(3) \quad & b = ab + ac + bc = a(b + c) + bc, \\(4) \quad & -c = -abc.\end{aligned}$$

(2)-ből $b + c = 0$, ezt (3)-ba helyettesítve, majd 0-ra redukálva

$$b(1 - c) = 0.$$

Ez kétféleképpen teljesülhet:

I. ha $b = 0$, akkor (2)-ből $c = 0$, és így (4) is teljesül, bármi is az a együttható;

II. ha $1 - c = 0$, azaz $c = 1$, akkor (2)-ből $b = -1$, (4)-ből pedig $a = -1$.

Hermann Tamás (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Helyettesítsünk (1)-ben x helyébe a -t, ekkor nyerjük, hogy

$$(5) \quad ab - c = 0, \quad c = ab.$$

Ezt beírva (1)-be és x helyébe b -t helyettesítve

$$(6) \quad b^3 - ab^2 + b^2 - ab = b(b + 1)(b - a) = 0.$$

Írjunk végül x helyébe 0-t, ekkor (5) felhasználásával

$$(7) \quad -c = -abc, \quad c(ab - 1) = ab(ab - 1) = 0.$$

(6) három esetben teljesül:

I. ha $b = 0$, ekkor (5)-ből $c = 0$ és (1) minden a -ra fennáll;

II. ha $b = -1$, (5)-ből $c = -a$ és (7)-ből $a = 0$ vagy $a = -1$. Az előbbi esetben nem kapunk azonosságot. $a = b = -1$, $c = 1$ viszont megoldása a feladatnak;

III. ha $b = a$, (5)-ből $c = a^2$ (7)-ből $a^2(a^2 - 1) = 0$, $a = 0$, $a = 1$ vagy $a = -1$.

Az első esetben $a = b = c = 0$, az I. speciális esete. $a = b = c = 1$ ismét nem ad megoldást, $a = b = -1$, $c = 1$ pedig a II. alatt talált megoldás.