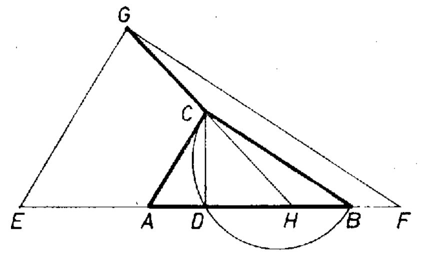
Az EFG háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, oldalai kétszer akkorák és párhuzamosak az ABC háromszög megfelelő oldalaival.



Messe a GC egyenes AB-t a H pontban, ekkor AC, ill. BC az EGH, ill. FGH háromszög EG-vel, ill. FG-vel párhuzamos középvonala, mert párhuzamos vele és feleakkora. Így

$$GC = CH, \qquad AH = EA = ED - AD = AB - AD = DB$$

és hasonlóan $BH = DA$. A CDH derékszögű háromszögből Pitagorasz tétele szerint

$$GC^2 = CH^2 = CD^2 + DH^2 = CD^2 + (AH - AD)^2 = CD^2 + (DB - AD)^2.$$

Az AB, BC, CA oldalakat c, a, b-vel jelölve az ABC háromszög kétszeres területét felírjuk kétféleképpen:

$$c \cdot CD = ab, \qquad \text{innen} \quad CD = ab/c;$$

AD meghatározására vegyük észre, hogy a BC átmérővel rajzolt kör átmegy D-n és érinti AC-t. Így az A-ból húzott AC érintőre és AB szelőre fennáll

$$b^2 = AC^2 = AD \cdot AB = AD \cdot c,$$
$$\text{azaz} \qquad AD = b^2/c;$$

és hasonlóan

$$DB = a^2/c.$$

Ezeket felhasználva

$$GC^2 = \frac{a^2b^2}{c^2} + \left(\frac{a^2}{c} - \frac{b^2}{c}\right)^2 = \frac{a^4 - a^2b^2 + b^4}{c^2}$$

egy kívánt előállítás. Itt még valamelyik oldal könnyen kiküszöbölhető a másik kettő felhasználásával Pitagorasz tétele alapján.

Fazekas Tibor (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., II. o. t.)
Szepesi László (Sopron, Széchenyi I. Gimn., II. o. t.)