I. megoldás. Legyen n olyan háromjegyű szám, amelyben a számjegyek összege 3-szor akkora, mint a 75-tel kisebb szám számjegyeinek az összege. Jelöljük n egymás utáni jegyeit x, y, z-vel, a jegyek összegét s-sel, az $n-75$ szám jegyeit x_1, y_1, z_1-gyel, a jegyek összegét s_1-gyel. Feltevésünk szerint

(1) $$s=3s_1.$$

Megvizsgáljuk, hogy az $n-75$ kivonást a 10-es számrendszerben szokásos módon, jegyenként elvégezve, milyen esetek fordulhatnak elő. Számunkra az lesz lényeges, hogy az egyes helyi értékű jegyek meghatározásánál keletkezik-e átviendő maradék, vagy sem.

$$\begin{array}{rccc} & x & y & z \\ - & & 7 & 5 \\ \hline & x_1 & y_1 & z_1 \end{array}$$

a) Sehol sem keletkezik maradék, azaz

(2a) $$z\geq 5,\qquad y\geq 7;$$

ekkor $\quad x_1=x,\qquad y_1=y-7,\qquad z_1=z-5,\qquad$ tehát

(3a) $$s=s_1+12.$$

b) Az egyeseknél van maradék, a tízeseknél nincs, azaz

(2b) $$z<5,\qquad y\geq 8;$$

ekkor $\quad x_1=x,\qquad y_1=y-8,\qquad z_1=z+5,\qquad$ tehát

(3b) $$s=s_1+3.$$

c) Az egyeseknél nincs maradék, a tízeseknél van, azaz

(2c) $$z\geq 5,\qquad y<7;$$

ekkor $\quad x_1=x-1,\qquad y_1=y+3,\qquad z_1=z-5,\qquad$ tehát

(3c) $$s=s_1+3.$$

d) Az egyeseknél is, a tízeseknél is van maradék, azaz

(2d) $$z<5,\qquad y<8;$$

ekkor $\quad x_1=x-1,\qquad y_1=y+2,\qquad z_1=z+5,\qquad$ tehát

(3d) $$s=s_1-6.$$

Feladatunkban azonban (1) alapján $s-s_1=2s_1$, tehát az $s-s_1$ különbség pozitív és páros, így csak az *a)* eset lehetséges, hiszen a *b)*, *c)* esetekben ez a különbség páratlan, a *d)* esetben pedig negatív. Az s, s_1 ismeretlenekre az (1), (3a) egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy

(4) $$s=x+y+z=18,$$

és $s_1=6$. Ha viszont az n szám jegyeire (4) és (2a) teljesül, akkor (3a) szerint $s_1=s-12=6$, tehát (1) is teljesül, így annak, hogy az n számnak meglegyen a kívánt tulajdonsága, szükséges és elégséges feltétele (2a) és (4) teljesülése.

Feladatunk szerint ezek között a számok között kell meghatároznunk a legkisebbet és a legnagyobbat. Legkisebb a szám, ha jegyei rendre a legkisebbek, tehát az első jegye 1-es és a másik kettő összege 17, eszerint a legkisebb, kívánt tulajdonságú szám a 189.

Mivel (2a) szerint z, y legkisebb értékei mellett is az összegük 12, így x lehető legnagyobb értéke 6 – tehát a legnagyobb előírt tulajdonságú szám a 675.

Lengyel János (Budapest, I. István Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Legyen a két keresett szám n, ill. N. Mindkettő osztható 3-mal, mert számjegyeik összege egy-egy egész szám 3-szorosával egyenlő – ti. $n-75$, ill. $N-75$ számjegyei összegének 3-szorosával.

Így $n-75$ és $N-75$ is osztható 3-mal, mert 75 is osztható vele, és ha egy különbség mindkét tagja osztható egy számmal, akkor maga a különbség is osztható vele.

Eszerint $n-75$ és $N-75$ számjegyeinek összege $3k$, ill. $3K$ alakú szám (ahol k, K természetes számok), ezért n, N számjegyeinek összege $9k$, ill. $9K$ alakú, tehát n is, N is, osztható 9-cel.

Ezeket tudva n és N jegyeinek összegére csak 9 és 18 jön szóba. Ugyanis háromjegyű szám számjegyeinek összege legföljebb 27 – ti. egyedül a 999 esetében –, ez viszont nem lehet N értéke, különben $N-75$ jegyösszege 9 lenne, holott $999-75$ nem osztható 9-cel. Megállapításunkat visszafordítva $n-75$-re és $N-75$-re, ezek jegyeinek összege csak 3 vagy 6 lehet.

Megmutatjuk, más oldalról, hogy $n-75$ és $N-75$ jegyeinek összege nem lehet 3. Ugyanis egyrészt e számok így alakíthatók:

$$n-75=9m-75=9(m-9)+6, \qquad N-75=9(M-9)+6.$$

Vagyis 9-cel osztva 6-ot adnak maradékul. Másrészt általában bármely egész számot 9-cel osztva a (legkisebb nemnegatív) maradék ugyanannyi, mintha a szám (tízes számrendszerbeli alakja) számjegyeinek összegét osztjuk 9-cel. Valóban, legföljebb háromjegyű számokra szorítkozva az A, B, C jegyekkel írt szám így írható

$$100A+10B+C=9(11A+B)+(A+B+C),$$

tehát a $(100A+10B+C):9$ és $(A+B+C):9$ osztások maradéka egyező.

Ezek szerint $n-75$ és $N-75$ jegyeinek összegét 9-cel osztva a maradék 6, és ezt a fentiekkel egybevetve maga az összeg is 6. Ebből pedig adódik, hogy n és N számjegyeinek összege 18.

A legkisebb szóba jövő n érték, 189, mindjárt megfelel, mert így $189-75=114$, jegyösszege 6.

Megfelel $N-75$ legnagyobb szóba jövő értéke, 600 is, mert így $N=675$, jegyeinek összege 18.