

Jelöljük $a^n + 1/a^n$ -t A_n -nel és A_1 -et rövidebben A -val. (Nyilván fel kell tennünk, hogy $a \neq 0$. Világos továbbá, hogy $A_{-n} = A_n$, $A_0 = 2$.)

$$A^2 = a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} = A_2 + 2, \quad \text{így} \quad A_2 = A^2 - 2.$$

Ide a helyébe a^2 -et, ill. a^3 -t írva adódik, hogy

$$A_4 = A_2^2 - 2, \quad A_6 = A_3^2 - 2.$$

Ezekből látható, hogy A -val együtt A_2 is és így A_4 is egész, továbbá A_6 egész, ha A_3 az. Viszont az

$$A^3 = a^3 + 3a + 3 \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^3} = A_3 + 3A$$

összefüggésből

$$A_3 = A^3 - 3A$$

egész, ha A egész. Végül A_5 -re és A_7 -re pl. az

$$A_3 \cdot A_2 = a^5 + a + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^5} = A_5 + A, \quad \text{azaz}$$

$$A_5 = A_3 \cdot A_2 - A, \quad \text{és}$$

$$A_6 \cdot A = a^7 + a^5 + \frac{1}{a^5} + \frac{1}{a^7} = A_7 + A_5, \quad \text{azaz}$$

$$A_7 = A_6 \cdot A - A_5$$

összefüggésből látható, hogy ezek is egészek.

Megjegyzés. Többször használtuk az

$$A_k \cdot A_l = A_{k+l} + A_{k-l} = A_{k+l} + A_{|k-l|}$$

azonosság speciális eseteit. Ezt pl. $l = 1$ -re alkalmazva (mint a megoldásban $k = 6$ esetére) adódik, hogy ha A_n egész a k -nál nem nagyobb természetes számokra, akkor A_{k+1} is egész. Így A_n egész minden természetes számra és $A_n = A_{|n|}$, $A_0 = 2$ folytán minden egész n -re.