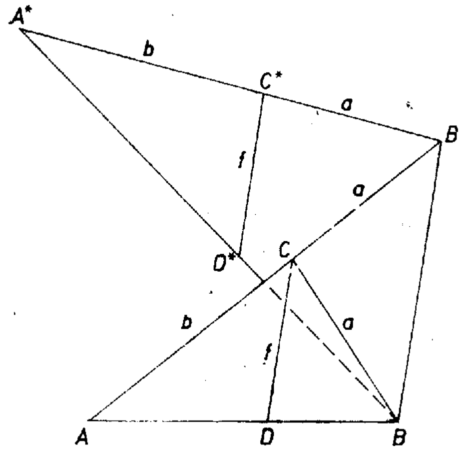
I. megoldás. Legyenek az adott oldalszakaszok $CB = a$, $CA = b$ (ahol $a \leqq b$) és $CD = f$.

Ötletet ad a szögfelező osztásarányára vonatkozó, ismert tétel bizonyításához használt ábra (1. ábra).



1. ábra

Mérjük rá CA-nak C-n túli meghosszabbítására a $CB^* = CB = a$ szakaszt, így CBB^* egyenlő szárú háromszög, $B^*B || CD$, $AB^*B\triangle \sim ACD\triangle$,

$$BB^* = DC \cdot \frac{AB^*}{AC} = f\frac{a+b}{b}.$$

Ez az adatokból megszerkeszthető, és belőle az ábra rekonstruálható: BB^*C egyenlő szárú háromszög, BB^*CD trapéz, végül BD és B^*C metszéspontja A.

A szerkesztés helyességéhez meg kell mutatni, hogy az adódó AC szakasz hossza b. Valóban

$$AB^* : AC = B^*B : CD,$$

$$1 + \frac{a}{AC} = \frac{BB^*}{CD} = 1 + \frac{a}{b}.$$

A szerkesztés végrehajtható, ha $BB^* < 2a$, amit f-re megoldva

(1)
$$f < \frac{2ab}{a+b}.$$

Az ábrán $A^*C^* = b$, $C^*B^* = a$, $C^*D^* = f$, és a B^*-on átmenő, C^*D^*-gal párhuzamos egyenesnek A^*D^*-gal való metszéspontja B.

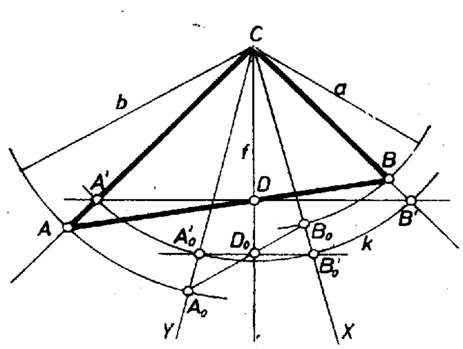
Balogh Zoltán (Debrecen, Fazekas M. Gimn., I. o. t.)

II. megoldás. Az eddigi jelölések mellett jelöljük a CD-re D-ben emelt merőlegesnek az AC, BC egyenesen levő pontját A'-vel, ill. B'-vel. Az 1169. gyakorlatban[1] láttuk, hogy $A'C$ az a és b szakaszok harmonikus középarányosa:

$$A'C = h = \frac{2ab}{a+b},$$

ami a, b alapján (pl. az idézett helyen leírt eljárással) megszerkeszthető. Így az $A'B'C$ egyenlő szárú háromszög is, és ebből a keresett ABC háromszög is könnyen előállítható.

Induljunk ki egy tetszőleges XCY szögből: mérjük fel ennek a száraira a $CB_0 = a$, $CA_0 = b$ szakaszokat (2. ábra).



[1]K. M. L. 37 (1968) 70. o. Másképpen

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

2. ábra

Jelöljük a szögfelező és A_0B_0 metszéspontját D_0-lal, a CD_0-ra D_0-ban emelt merőlegesnek a szárakon levő pontjait A'_0-vel, B'_0-vel. Mérjük fel a CD_0 szögfelezőre a $CD = f$ szakaszt, és messe a CD-re D-ben emelt merőlegest a C középpontú, CA'_0 sugarú k kör az A', B' pontokban. Végül mérjük fel a CA', CB' egyenesekre a $CA = b$, $CB = a$ szakaszokat, a kapott ABC háromszög a keresett háromszög.

Szerkesztésünk helyességének bizonyításához csak azt kell megmutatnunk, hogy az AB oldalt a C-hez tartozó szögfelező D-ben metszi. Jelöljük ezt a metszéspontot D_1-gyel, az AD_1-re D_1-ben emelt merőlegesnek a szárakon levő pontjait A'_1-gyel, B'_1-gyel. Az 1169. gyakorlat szerint

$$A'_1C = h = \frac{2ab}{a+b},$$

és ez szerkesztésünk szerint egyenlő CA'_0-vel. A'_1, B'_1 tehát rajta van k-n, így rendre azonos A'-vel, B'-vel, amiből már következik, hogy D_1 és D azonosak.