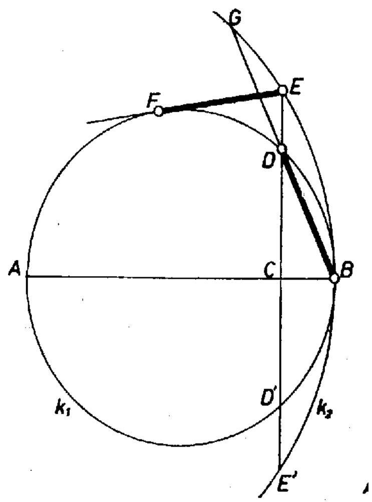
I. megoldás. Legyen a felhasznált merőleges másik metszéspontja k_1-gyel D', k_2-vel E'. Ekkor D és D', valamint E és E' egymás tükörképei az AB egyenesre, és az E-ből húzott érintőre és szelőre fennáll (1. ábra):

$$EF^2 = ED \cdot ED' = DE \cdot DE'.$$



1. ábra

Messe a BD egyenes k_2-t másodszor G-ben, ekkor $BG = 2BD$, $DG = DB$, mert k_2 a k_1-nek a B középpontból kétszeresre nagyított képe, hiszen B közös pontjuk, k_1 középpontja a BA félegyenesen van, és k_2 és k_1 sugarának aránya $2:1$. BG és EE' a k_2-ben szelők, egymást D-ben metszik, ezért tovább

$$EF^2 = DE \cdot DE' = DB \cdot DG = DB^2.$$

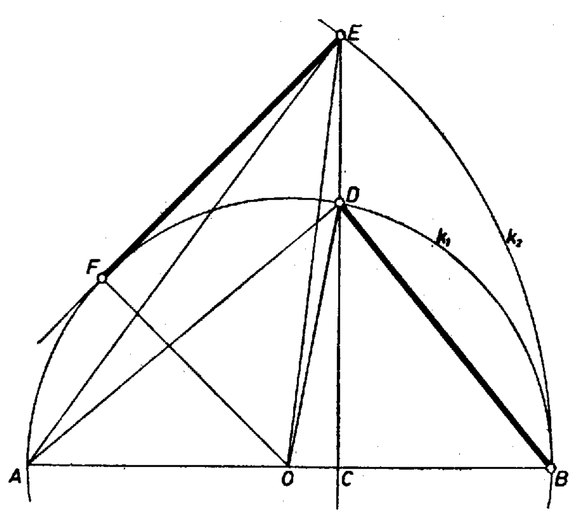
Így pedig $EF = DB$, és ezt kellett bizonyítanunk.

Blaskó Imre (Balassagyarmat, Balassi B. Gimn., II. o. t.)
Kiss Mária (Makó, József A. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Legyen k_1 középpontja O. A szerkesztések, valamint Thalész tétele alapján EOF, EOC, EAC, DOC, ADC és ABD derékszögű háromszögek, így Pitagorasz tétele alapján (2. ábra)

$$\begin{aligned} EF^2 &= EO^2 - OF^2 = EC^2 + OC^2 - OD^2 = AE^2 - AC^2 - \left(OD^2 - OC^2\right) = \\ &= AB^2 - \left(AC^2 + DC^2\right) = AB^2 - AD^2 = BD^2, \end{aligned}$$

és ebből $EF = BD$.



2. ábra

2. ábra

Lengyel János (Budapest, I. István Gimn., II. o. t.)