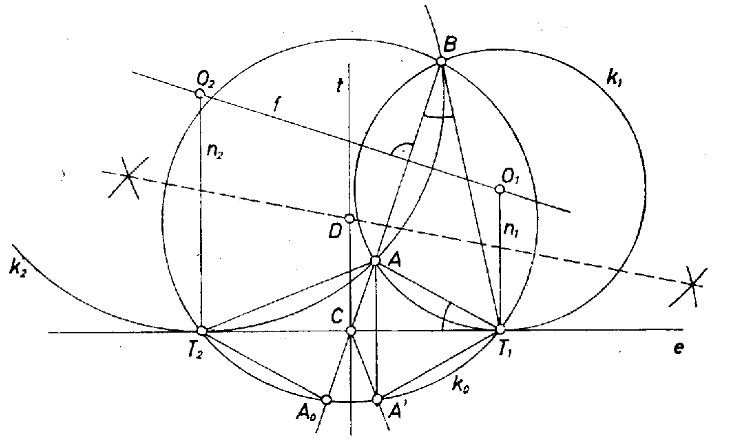
I. megoldás. Be fogjuk látni, hogy a kapott T_1, T_2 pont éppen a keresett k_1, k_2 körnek e-n levő érintési pontja. Eszerint egy lehetőség a szerkesztés befejezésére: k_i-nek $(i=1,2)$ O_i középpontját az AB szakasz f felező merőlegeséből a T_i-ben e-re állított n_i merőleges metszi ki.



Azt bizonyítjuk, hogy az A, B, T_1 pontokon átmenő k_1^* kör érinti e-t, tehát azonos k_1-gyel. Messe az AB (azaz CA) egyenes a D körüli, $DA'(=DB)$ sugarú k_0 segédkört a (B-től különböző) A_0 pontban. A_0 az A'-nek a $CD=t$ tengelyre vonatkozó tükörképe, mert a CA', CA egyenesek egymás tükörképei e-re, ennélfogva a C-n átmenő, e-re merőleges t-re is, t pedig másrészt k_0-nak is szimmetriatengelye. T_1, T_2 ugyancsak tükrös pontpár t-re. Így a két tükrözés és a k_0-beli kerületi szögek lapján

$$AT_1C\sphericalangle = AT_1T_2\sphericalangle = A'T_1T_2\sphericalangle = A_0T_2T_1\sphericalangle = A_0BT_1\sphericalangle = ABT_1\sphericalangle,$$

ami az AT_1 íven levő kerületi szög, tehát T_1C valóban érinti k_1^*-ot. Ezt akartuk bizonyítani.

Amit T_1-re kaptunk, T_2-re is érvényes, hiszen az 1, 2 indexeket tetszés szerint helyezhettük el e és k_0 metszéspontjaiban.

Hasonlóan az A, B jelölések is felcserélhetők volnának. Ha A' helyett B-nek e-re vonatkozó B' képén át szerkesztenők a segédkört (természetesen AB' felező merőlegesével metszve t-t), k_0-nak e-re vonatkozó tükörképét kapnánk meg, és ez ugyanazokat a T_1, T_2 pontokat metszi ki e-ből.

A szerkesztés a feltevés szerint mindig végrehajtható, C és A', valamint k_0 és T_1, T_2 létrejönnek, mert A' és B a k_0-nak e két oldalán levő pontjai. Amennyiben pl. A rajta van e-n, akkor C és A' azonos vele, k_0 azonnal a keresett kört adja, ekkor egyetlen megoldás van.

Megjegyzés. A szerkesztés érdekessége, hogy hasonlóság felhasználása nélkül – más szóval kizárólag középiskolai I. osztályos ismeretek alapján – jut célba.

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy az A-n átmenő és e-t T_1-ben érintő k_1^{**} kör átmegy B-n is, tehát azonos k_1-gyel. Messe az AB egyenes k_1^{**}-ot B^{**}-ban. k_1^{**}-nak a CA egyenes szelője, CT_1 pedig érintője, ezért a szelő- és érintőszakaszok tétele szerint

$$CB^{**}=\frac{CT_1^2}{CA}.$$

Másrészt A_0B és T_1T_2 a k_0-nak szelői, metszéspontjuk C, felezi T_1T_2-t, így $CA_0=CA$ alapján

$$CB=\frac{CT_1\cdot CT_2}{CA_0}=\frac{CT_1^2}{CA},$$

tehát $CB^{**}=CB$, B^{**} azonos B-vel. Ezt akartuk bizonyítani.

Szabó György (Nyíregyháza, Vasvári P. Gimn., III. o. t.)