a) Mivel Jóska száma 7-es számjegyre végződött, azért az 1-gyel növelt 23-szorosának végén 2-es állt, hiszen a szorzat (és összeg) utolsó számjegyét egyedül a tényezők (ill. tagok) utolsó jegyei határozzák meg, és $7\cdot 3+1$ utolsó jegye 2. Ugyanígy az összeg 11-szeresében is 2-os az utolsó jegy. Továbbmenve a 23-mal képezett szorzat 6-osra, az 1-gyel nagyobb szám 7-esre végződött, és ez visszaadódott az utolsó két szorzás után is, mert a $33\cdot 77$ szorzat utolsó jegye 1-es.

Jelöljük az utoljára kapott szorzatból az utolsó 7-es elhagyásával kapott számot A-val, jegyeinek számát k-val, ekkor a szám $10\,A+7$, a 7-es előre írásával kapott szám $7\cdot 10^k+A$, hiszen az új számból A-t levonva a 7-es után k darab 0 áll. Ezért Jóska utolsó közlése alapján

$$\frac{7\cdot 10^k+A}{7}=10A+7,\qquad A=\frac{7\cdot 10^k-49}{69}.$$

Eszerint A egy olyan osztás hányadosa, melyben az osztó 69, a maradék 49, az osztandó pedig egy 7-esből és utána k (ismeretlen) számú 0-ból áll. Fordítva: ha a $700\ldots:69$ osztásban olyan helyen állunk meg, ahol a maradék 49, akkor a hányados alkalmas lesz az A szám céljára.

Megállva az első ilyen helyen, az alábbiakat kapjuk A-ra, majd $10A+7$-re, a 77-tel való szorzás előtti szorzandóra, és így tovább, a Jóska által végzett egymás utáni műveletek eredményeire, fordított sorrendben:

A		101	449	275	362	318	840	579,
$10A+7=B=$	1	014	492	753	623	188	405	797,
$B:77=C=$		13	175	230	566	534	914	361,
$C:33=D=$			399	249	411	107	118	617,
$(D-1):23=E=$			17	358	670	048	135	592,
$E:11=F=$			1	578	060	913	466	872,
$(F-1):23=$				68	611	344	063	777.

Az utolsó lehetett Jóska kiindulási száma.

Megjegyezzük, hogy ha a visszafelé végzett számítássorozat nem vezetett volna minden lépésben egész számra, akkor A helyén próbálkozhattunk volna azzal a számmal is, amely a $700\ldots:69$ osztás hányadosa akkor, amikor másodszor, 3-adszor, $\ldots$, k-adszor $\ldots$ lép fel maradékként 49, vagyis az $\overline{A7A}$ (43 jegyű), $\overline{A7A7A}$ (65 jegyű), $\ldots$ számmal, hiszen az A szám utolsó (9-es) jegyének leírásakor maradt 49-es mellé 0-t levéve a hányados új egye 7, a maradék is 7, és innen kezdve ismétlődnek A jegyei.

b) Pista megszerzett adata akkor lett volna nélkülözhető, ha Jóska száma végére bármely J jegyet próbálva, mindig a 7-est kaptuk volna előreírandó jegyként és osztóként. Ez azonban nem áll, mert az egymás után képezett számok utolsó jegye rendre $3J$, $3J+1$ (kétszer egymás után), $9J+3$, $9J+4$ és az utolsó két szorzás után ismét $9J+4$, ill. ennek a számnak utolsó jegye. Ez $4-J$, ill. $14-J$ alakban is írható, eszerint minden egyes J-hez más lenne az előreteendő számjegy és osztó. Csak a $J=4$ és $J=3$ esettel nem kellene próbát tennünk, az előbbi 0 osztóra vezetne, az utóbbi pedig tetszés szerinti számú 1-essel írt, vagyis határozatlan számra.

Nem látható be, hogy enélkül milyen hosszú számolás után bukkantunk volna rá a fenti megoldásra, vagy egy esetleges más megoldásra.

Megjegyzés. Szorzás útján is megkaphatjuk a A számot. Az utolsó 3 lépés sorrendjét megfordítva: A olyan szám, amelyet a következő 3 változtatás után visszakapunk: I. a végére írunk egy 7-est, II. az új számot szorozzuk 7-tel, III. a szorzat elejéről elhagyunk egy 7-est. Így, I. és II. alapján a szorzat utolsó jegye $7\cdot 7=49$-nek a 9-ese, ez A egyese, egyben a szorzandó tízes helyi értékű jegye; ezért a szorzat tízes jegye $7\cdot 9+4=67$-ből a 7-es, ez a szorzandó százasa; ezért a szorzat százasa $7\cdot 7+6=55$-ből az 5-ös, ezrese a $7\cdot 5+5=40$-ből a 0, és így tovább.

Olyan helyen állhatunk meg ebben az eljárásban, ahol 7-et írtunk le, és nincs tízes átvitel, ekkor A-t – III. szerint – ennek a 7-esnek az elhagyásával kapjuk. Fönt mindjárt az első lehetséges helyen megálltunk, a szorzat 22-ik jegye lett a maradék nélküli 7-es. Továbbmenve a 44., 66., $\ldots$, $22k$, $\ldots$ sorszámú jegyek – mindig a 7-es – leírása lenne alkalmas hely a megállásra.

2. További, mélyebb megjegyzés olvasható ezen szám 193. oldalán.