Erzsi megállapítása helyes, bármely M osztó esetében (itt $M = 12$, ill. 14) elég az M-nél kisebb, nemnegatív egész számokra szorítkozni a keresésben, mert ha az egyik tényező $a = kM + r$, ahol k egész szám és $0 \le r < M$, továbbá a másik tényező b, akkor szorzatuk $ab = (kb) \cdot M + rb$, és ez M-mel osztva ugyanazt a maradékot adja, mint rb, hiszen.

$$\frac{ab}{M} = kb + \frac{rb}{M},$$

ahol kb egész szám. (Ez a meggondolás természetesen b-re is érvényes.)

Nem szerepelhet azonban a kiválasztott számok között a 0, mert ezt a többi 4 szám bármelyikével szorozva ugyanazt az osztandót és maradékot kapjuk, ti. 0-t. Ugyanezért az 5 számnak – a talált korlátok között – egymástól is különbözőnek kell lennie.

5 különböző szám – mondjuk a, b, c, d és e – közül 10 kéttényezős szorzat képezhető:

(1) $$ab,\ ac,\ ad,\ ae;\ bc,\ bd,\ be;\ cd,\ ce;\ de.$$

A további meggondolások azon az észrevételen alapulnak, hogy ha a A, M, K, R egész számokra

$$A = MK + R$$

és d az M egy osztója, akkor vagy A is, R is osztható d-vel, vagy egyik sem. Valóban, egyenlőségünkből

$$A - R = MK,$$

ami osztható d-vel, és ez nem következhet be úgy, ha a különbség egyik tagja osztható d-vel, a másik nem.

I. Megmutatjuk, hogy $M = 12$ esetén nem található megfelelő számötös. A tíz kettősszorzat osztási maradékának ugyanis a

(2) $$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$$

számok közül kell kikerülnie. Ezekből bárhogy választunk ki tízet, kerül közéjük páros is és páratlan is. Kéttényezős szorzataink közül megjegyzésünk szerint csak a párosak adnak páros maradékot, mivel 12 páros; sőt, mivel 12 osztható 4-gyel is, ha egy szorzat 4-gyel osztható, akkor a maradéka is, és csak akkor.

A szorzatok közt akkor van páros, ha az öt kiválasztott szám közt van. Ha ez osztható 4-gyel is, akkor a másik négy számmal való szorzatainak maradéka is; ámde a (2) számok közül csak három osztható 4-gyel. Így az öt szám közt nem lehet 4-gyel osztható.

Ha viszont az öt szám közt csak 4-gyel nem osztható páros szám szerepel, az ilyenek páratlan többszöröse is ilyen:

$$(4k + 2)\,(2l + 1) = 4(2kl + k + l) + 2,$$

tehát ha a többi négy szám páratlan, akkor négy szorzat maradéka 4-gyel nem osztható páros szám, holott az (1) számok között csak három ilyen van.

Ha pedig az öt szám közt legalább két páros van, akkor ezeknek a többi három számmal és egymással való szorzata, tehát legalább 7 szorzat páros, és így a maradékuk is, az (1) számok közt viszont csak hat páros van. Így semmilyen öt számból kiindulva nem lehet az összes kéttényezős szorzatok maradéka (12-vel osztva) különböző.

II. $M = 14$ esetén a lehetséges osztási maradékok

(3) $$0^*,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7^*,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13.$$

A fentiekhez hasonlóan kapjuk, hogy számötösünkben nem léphet fel 0, de a 7 sem, mert ennek a négy többivel való szorzata is osztható volna 7-tel, tehát – mivel 14 osztható 7-tel – megjegyzésünk szerint ezek maradéka is, holott a (3) számok közül csak kettő osztható 7-tel. Megjegyzésünk szerint ekkor megfordítva is, sem 0, sem 7 nem szerepelhet maradékként, így (3)-ból csak 6 páros és 6 páratlan maradék léphet fel. Ebből a fentiekhez hasonlóan adódik, hogy az öt szám közül egy, mondjuk a páros, a többi négy szám páratlan.

Itt csak a páratlanok összeválogatása igényel meggondolást. Ha ugyanis b, c, d, e olyan, hogy (1) utolsó 6 szorzata különböző maradékot ad – mint láttuk, csupa páratlant –, akkor a-ként 2, 4, 6, 8, 10 és 12 mindegyike megfelel, mert (1) első négy szorzata és maradékuk páros, tehát amazoktól különböző. Továbbá kettőjükből – pl. ab-ből és ac-ből – nem adódhat ugyanaz a maradék, különben $ac - ab = a(c - b)$ osztható volna 14-gyel, tehát 7-tel is, ami nem teljesül, mert $c - b$ értéke ugyancsak a 2, 4, 6, 8, 10, 12 számok valamelyike.

A b, c, d, e számok összeválogatása céljára felírjuk táblázatban a szóba jövő páratlan számokból alakuló szorzatok 14-es maradékát.

a kisebbik tényező	a nagyobbik tényező 3	5	9	11	13
1	3	5	9	11	13
3		1	13	5	11
5			3	13	9
9				1	5
11					3

Véve pl. $b=1$, $c=3$, $d=5$-öt, az ezekből képezett páros szorzatok maradékai a táblázat szerint 3, 5 és 1. Mivel a 3-as sor folytatásában van még 5-ös és az 5-ös sorában van 3-as, a 11, ill. 9 oszlopában, azért e-ként nem használható 11 és 9, de lehet $e=13$.

Ezek szerint Erzsi második feladata követélményeinek megfelel pl. az

$$a=6, \quad b=1, \quad c=3, \quad d=5, \quad e=13$$

számötös, a szorzatokból adódó maradékok növekvő rendben:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 13.$$

Sailer Kornél (Ózd, József A. Gimn., III. o. t.)
Gál Péter (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., I. o. t.)

Megjegyzés. Könnyű belátni, hogy ha a 14-es osztó esetén b, c, d, e egy megfelelő páratlan számnégyes, akkor $14-b$, $14-c$, $14-d$, $14-e$ is megfelelő.

A további megfelelő páratlan négyesek:

$$1, 3, 9, 11; \quad 1, 5, 9, 11; \quad 1, 9, 11, 13; \quad 3, 5, 9, 13; \quad 3, 5, 11, 13,$$

számuk a fentivel együtt 6, így a számötös megválasztási lehetőségeinek összes száma $6 \cdot 6 = 36$.

Sailer Kornél, Gál Péter