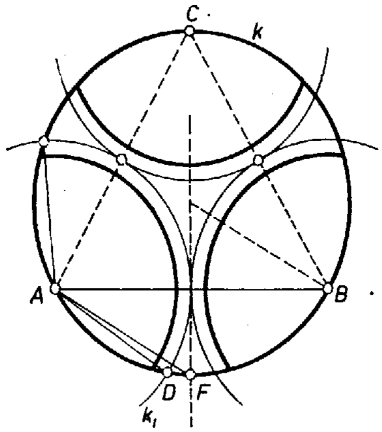
a) Az egyes kecskék által lelegelhető mezőrészek nem nyúlnak egymásba, ha a három lánc leerősítési pontja céljára pl. egy a legelőt határoló k körbe írt szabályos ABC háromszög csúcspontjait választjuk – és persze a láncok hosszát úgy, hogy mindegyik kecske valóban csak 1/4 részét érje el a legelőnek. Megmutatjuk ugyanis, hogy az A, B és C körül egymással páronként érintkező és egyenlő sugarú – vagyis $AB/2$ sugarú – körök k-ból ennek 1/4 részénél nagyobb területet fednek le. Ezt tudva az már nyilvánvaló, hogy az A, B, C középpontokat változatlanul hagyva, a sugarat viszont $AB/2$-nél kisebbre véve található olyan ϱ sugár, hogy az A (valamint B, ill, C) körüli, ϱ sugarú kör a legelő 1/4 részét fedi le, és nincs átfedés.



1. ábra

Messe az A középű, $AB/2$ sugarú k_1 a k-t a rövidebb AB ív D pontjában. Ez nincs rajta az AB húron, ennélfogva a húr felező merőlegesének A-t tartalmazó oldalán van, ezért – az AB ív felezőpontját F-fel jelölve (1. ábra)

$$DAB\sphericalangle > FAB\sphericalangle = 30^\circ,$$

tehát a k_1-nek k belsejében haladó ívéhez tartozó középponti szög nagyobb 120°-nál, ezért k_1 területének a k belsejébe eső t része nagyobb, mint területének 1/3 része:

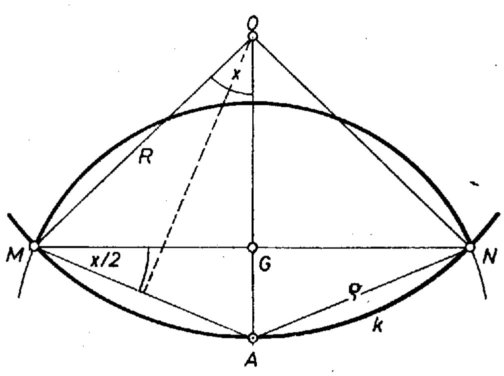
$$t > \frac{1}{3}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2.$$

A jobb oldal pedig éppen k területének 1/4 része:

$$\frac{\pi}{12}AB^2 = \frac{\pi}{12}\cdot 3R^2 = \frac{\pi R^2}{4},$$

ahol R a k sugara; ugyanis egyszerű számítás szerint $AB = R\sqrt{3}$.

b) Legyen a lánc kérdéses hossza ϱ, az A körüli, ϱ sugarú kör és k két metszéspontja M és N, k középpontja O, MN felezőpontja G, és $AOM\sphericalangle = x$ (fokban mérve; 2. ábra), az utóbbit fogjuk közelítően meghatározni.



2. ábra

A kecske által elérhető legelőrészt az AM, AN szakaszok az általuk k-ból lemetszett körszeletekre és az AMN körcikkre osztják, az előbbieket pedig úgy kapjuk, hogy az OMN körcikkből elhagyjuk az $OMAN$ deltoid területét. Nyilvánvalóan $MAN\sphericalangle = 180^\circ - x$, így a követelmény, a szimmetriát felhasználva

$$\varrho^2\pi\cdot\frac{180^\circ - x}{360^\circ} + R^2\pi\cdot\frac{2x}{360^\circ} - OA\cdot MG = \frac{1}{4}R^2\pi,$$

ahol $MG = R\sin x$, és $\varrho = 2R\sin x/2$. Az első tagban az AMG derékszögű háromszög felhasználásával egyszerűsítést ad a következő alakítás:

$$\varrho^2 = 2R\,\varrho\,\sin\frac{x}{2} = 2R\cdot AG = 2R(OA - OG) = 2R^2(1-\cos x),$$

hiszen a kerületi szögek tétele szerint $AMG\sphericalangle = AMN\sphericalangle = AON\sphericalangle/2$. Egyenletünk így alakul:

$$\left(1-\frac{x}{180^\circ}\right)\cos x + \frac{\sin x}{\pi} = \frac{3}{4},$$

és mivel a fentiek szerint $\varrho < R\sqrt{3}/2$, ezért

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{\varrho}{2R} < \frac{\sqrt{3}}{4} < 0{,}4331, \quad \frac{x}{2} < 25^\circ 40', \quad x < 51^\circ 20'.$$

A bal oldal értéke $x = 45^\circ$ esetén 0,7554, nagyobb a jobb oldalnál, $x = 46^\circ$ esetén pedig 0,7461, ez már kisebb. x keresett értéke a 0,0054 többlet, ill. 0,0039 hiány alapján $45^\circ 35'$ körül várható. ϱ/R-nek a választott szögekhez tartozó értéke 0,7654, ill. 0,7814, így csak 77% és 78% jön szóba.

$x = 45^\circ 35'$ esetén az egyenlet bal oldala 0,7500, tehát ez a keresett szögérték, ehhez $\varrho/R = 0{,}7748$, így 3 értékes jeggyel véve, ϱ a R-nek 77,5%-a.

Kuhár János (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., I. o. t.)