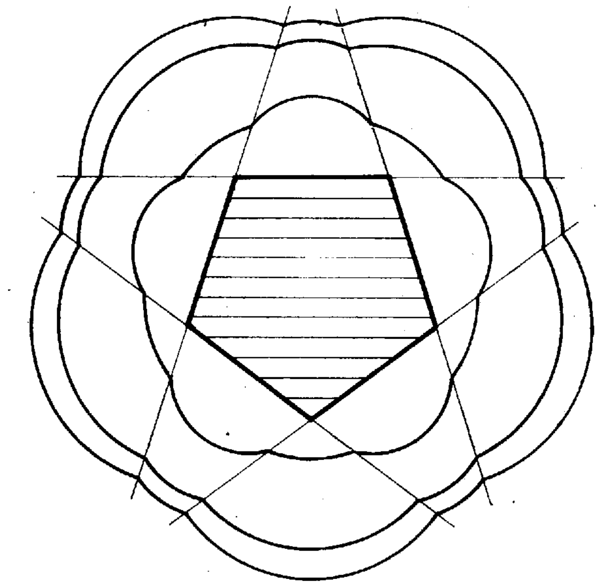
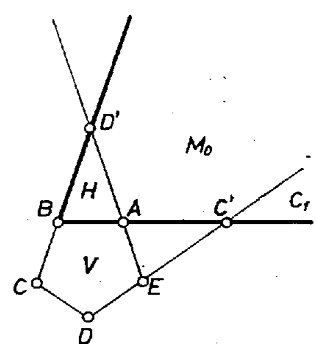
Az $ABCDE = V$ alapidom szabályos volta, forgási és tengelyes szimmetriái miatt elég a kérdéseket pl. az ABC szögnek abban az M mellékszög-tartományában vizsgálni, amelynek egyik szára a BA félegyenes (2. ábra).



1. ábra



2. ábra

A teljes úthosszak és terület az M-ben kapott úthosszak és terület 5-szöröse lesz.

A 72° nyílású M-ből az EA félegyenes egy szakasza az $ABD' = H$ egyenlő szárú háromszöget metszi le, a DE félegyenes pedig a C' csúcsú, 36° nyílású C_1 szögtartományt; a maradó tartomány legyen M_0.

P álláspontunkat H-ban felvéve V látószöge az $APB\sphericalangle$, M_0-beli P-ből az $EPB\sphericalangle$, C_1-beliből a $DPB\sphericalangle$, vagyis a BA oldal, ill, a BE, BD átló látószöge, így az útvonalak a mondott szakaszok $\vartheta = 90°$, $60°$, ill. $54°$ nyílású látószögkörívének részeiből állnak. A tartományok határvonalán felvett pontból a megfelelő két látószög azonos; pl. az AD' szakasz pontjaiból BA-é és BE-é, így a körív részek végpontjaikkal egymáshoz kapcsolódnak. Minthogy C_1-beli P-ből $DPB\sphericalangle < DC'B\sphericalangle = 36°$; ami kisebb ϑ mindegyik előírt értékénél, az útvonalak nem haladnak át C_1-en, a rész-ívek csatlakozási pontjai a $C'AD'B$ törött vonalon lesznek.

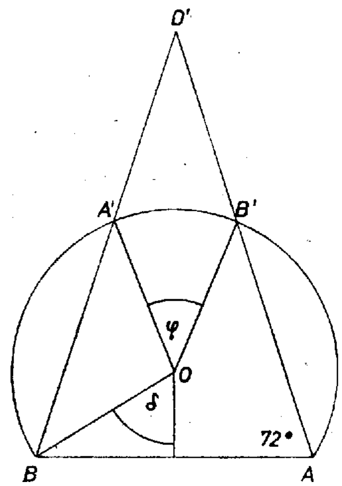
I. Az ívek hosszai céljára ki kell számítanunk sugarukat és középponti szögüket. A sugár H-ban mindig $r = AB/(2\sin\vartheta) = a/(2\sin\vartheta)$, M_0-ban pedig $R = BE/(2\sin\vartheta)$, ahol

$$EB = d = 2a\cos 36° = a\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

így – a látószög értékét az indexben feltüntetve

$$r_{90} = \frac{a}{2}, \qquad r_{60} = \frac{a}{\sqrt{3}}, \qquad r_{54} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right),$$
$$R_{90} = \frac{a}{4}\left(\sqrt{5}+1\right), \qquad R_{60} = \frac{a}{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{5}+1\right), \qquad R_{54} = a.$$

Messe az AB szakasz ϑ nyílásszögű ($90° \geqq \vartheta > 36°$), O középpontú látószögköríve AD'-t B'-ben, BD'-t A'-ben (3. ábra).



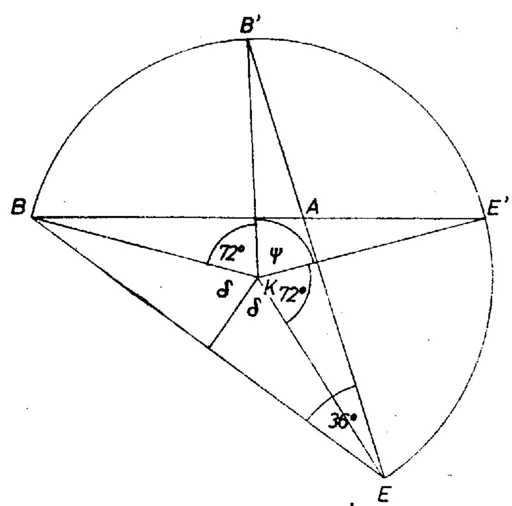
3. ábra

Az $AOB\sphericalangle = 2\vartheta$, $BOB'\sphericalangle = A'OA\sphericalangle = 2\cdot 72^\circ$ szögek lefedik az O körüli teljes szöget és az $A'OB'\sphericalangle = \varphi$ szöget mégegyszer, így

$$\varphi = (2\vartheta + 2\cdot 144^\circ) - 360^\circ = 2\vartheta - 72^\circ.$$

Hasonlóan az EB szakasz ϑ nyílásszögű, K középpontú látókoríve $E'B'$ rész-ívéhez tartozó középponti szög (mint előrebocsátottuk, B' azonos az előző számításban B'-vel, 4. ábra)

$$\psi = 360^\circ - (2\vartheta + 2\cdot 72^\circ) = 216^\circ - 2\vartheta.$$

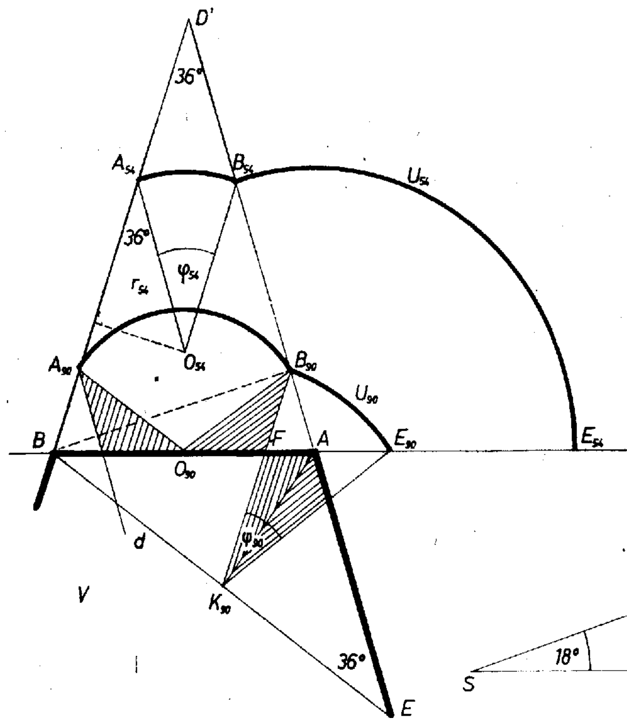


4. ábra

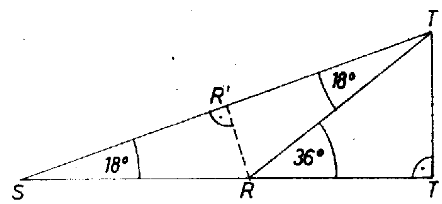
Így a három útvonal megfelelő íveihez tartozó középponti szög, mindjárt átszámítva ívmértékre

$$\varphi_{90} = 108^\circ = \frac{3\pi}{5}, \qquad \varphi_{60} = 48^\circ = \frac{4\pi}{15}, \qquad \varphi_{54} = 36^\circ = \frac{\pi}{5},$$
$$\psi_{90} = 36^\circ = \frac{\pi}{5}, \qquad \psi_{60} = 96^\circ = \frac{8\pi}{15}, \qquad \psi_{54} = 108^\circ = \frac{3\pi}{5}.$$

(Az A', B', E' pontot az 5. ábrán A_ϑ, B_ϑ, E_ϑ jelöli.)



5. *ábra*



6. *ábra*

Ezek alapján az U_ϑ útvonalak hossza, 4 értékes számjegyre

$$U_{90} = 5(A_{90}B_{90} + B_{90}E_{90}) = 5(r_{90} \cdot \varphi_{90} + R_{90} \cdot \psi_{90}) = \frac{\pi a}{4}\left(7 + \sqrt{5}\right) = 725{,}4 \text{ m},$$
$$U_{60} = 5(r_{60} \cdot \varphi_{60} + R_{60} \cdot \psi_{60}) = \frac{4\pi a}{3\sqrt{3}}\left(2 + \sqrt{5}\right) = 1024 \text{ m},$$
$$U_{54} = 5(r_{54} \cdot \varphi_{54} + R_{54} \cdot \psi_{54}) = \frac{\pi a}{2}\left(5 + \sqrt{5}\right) = 1137 \text{ m}.$$

II. A belső U_{90} és a külső U_{54} közti területet mint az U_{54}, valamint az U_{90} által körülhatárolt T_{54} és T_{90} területek különbségét számítjuk, a szimmetriát ismét felhasználva.

A $B_{54}E_{54}$ körív középpontja A, mert $BAE\sphericalangle = 108^\circ$, a látószög 2-szerese. Így T_{54}-nek M-beli része az $AB_{54}E_{54}$ és az $O_{54}A_{54}B_{54}$ körcikk és az $ABA_{54}O_{54}B_{54}$ ötszög. Az ötszög az ABD' háromszög és az $O_{54}A_{54}D'B_{54}$ négyszög különbsége, az utóbbi pedig rombusz, mert φ_{54} egyenlő az $AD'B$ szöggel. Az ABD' háromszögnek a szárra merőleges magassága és hasonlóan a rombusz magassága $BB_{90} = BE\ \sin 36^\circ = d \sin 36^\circ$, ill. $r_{54} \sin 36^\circ$, így – a vár alapidomának területét V-vel jelölve –

$$T_{54} = V + 5\left\{\frac{R_{54}^2 \cdot \psi_{54}}{2} + \frac{r_{54}^2 \cdot \varphi_{54}}{2} + \sin 36^\circ \left(\frac{d^2}{2} - r_{54}^2\right)\right\} =$$
$$V + \frac{\pi a^2}{4}\left(9 - \sqrt{5}\right) + \frac{15a^2 \sin 36^\circ}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right).$$

Az $A_{90}B_{90}$, $B_{90}E_{90}$ ív középpontja a BA oldal, ill. BE átló felezőpontja, így a $K_{90}B_{90}E_{90}$ körcikk belenyúlik V-be, messe a $B_{90}K_{90}$ sugár AB-t F-ben. Megmutatjuk, hogy a benyúló AFK_{90} háromszög területe egyenlő az U_{90} és V közötti, az U_{90} íveihez tartozó körcikkekkel le nem fedett $B_{90}FO_{90}$ háromszög területével; ebből következik, hogy T_{90} egyenlő V és az $O_{90}A_{90}B_{90}$, $K_{90}B_{90}E_{90}$ körcikkek 5-szörös területének összegével. Valóban,

$$B_{90}FA\sphericalangle = FAK_{90}\sphericalangle + FK_{90}A\sphericalangle = 54^\circ + \psi_{90}/2 = 72^\circ = B_{90}AF\sphericalangle = AB_{90}O_{90}\sphericalangle,$$

hiszen $B_{90}O_{90} = AO_{90}$. Így $B_{90}F$ felezi az $AB_{90}O_{90}$ szöget, $B_{90}AF$ és $FO_{90}B_{90}$ egyenlő szárú háromszögek, $FO_{90} = FB_{90} = AB_{90}$, az előbbi hasonló $O_{90}AB_{90}$-hez, ezért

$$O_{90}A : AB_{90} = AB_{90} : AF = AB_{90} : (O_{90}A - AB_{90}), \tag{1}$$
$$AB_{90}^2 + O_{90}A \cdot AB_{90} - O_{90}A^2 = 0,$$

ahonnan a pozitív gyök

$$AB_{90} = O_{90}A \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{a}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right),$$
$$FK_{90} = R_{90} - B_{90}F = R_{90} - AB_{90} = \frac{a}{2} = O_{90}A.$$

Mármost ismét (1) alapján

$$FB_{90} \cdot FO_{90} = FA \cdot FK_{90},$$

amit $(1/2)\sin 72°$-kal szorozva a két oldalon a mondott háromszögek területe áll, hiszen AB-re merőleges magasságuk $FB_{90}\sin 72°$, ill. $FK_{90}\sin 72°$.

Így a fentiek szerint

$$T_{90} = V + \frac{5}{2}(R_{90}^2 \cdot \psi_{90} + r_{90}^2 \cdot \varphi_{90}) = V + \frac{\pi a^2}{16}\left(9+\sqrt{5}\right),$$

és az U_{90} és U_{54} közti terület

$$T = T_{54} - T_{90} = \frac{\pi a^2}{16}\left(27 - 5\sqrt{5}\right) + \frac{15a^2}{4}\left(\sqrt{5}-1\right) \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} =$$

$= 58\ 307\ \mathrm{m}^2 = 5{,}83$ hektár .

Hárs László (Budapest, Berzsenyi D. Gimn.)

Megjegyzés. $\sin 36°$ felhasznált értékét az 1560. feladatban talált

$$\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4},\ \cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

értékekből megkaphatjuk a II. osztályosok előtt általában még nem ismert addiciótétel (2-szeres szög függvényei) nélkül is, a $18°$-os alapszögű RST egyenlő szárú háromszögből, ennek kétféle magasságát berajzolva és felhasználva a sinus és cosinus definícióját, valamint a külső szög tételét (6. ábra).

$$\sin 36° = \frac{TT'}{RT} = \frac{ST\sin 18°}{RT} = 2\sin 18° \cdot \frac{R'T}{RT} =$$
$$2\sin 18° \cos 18° = \frac{2}{16}\sqrt{\left(6-2\sqrt{5}\right)\left(10+2\sqrt{5}\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}};$$

$\cos 36°$ fenti értéke pedig pl. ugyanezen ábrából

$$\cos 36° = \frac{RT'}{RT} = \frac{ST'-SR}{RT} = \frac{ST\cos 18°}{RT} - 1 = 2\cos 18° \cdot \frac{R'T}{RT} - 1 = 2\cos^2 18° - 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$