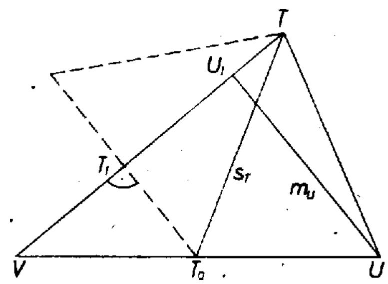
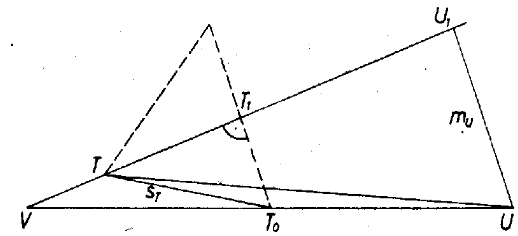
A feladat megoldása a következő észrevételen alapszik: ha a TUV háromszögbon a T-ből induló s_T súlyvonal hossza egyenlő az U-ból induló m_U magasság hosszával, akkor s_T 30°-ot vagy 150°-ot zár be a TV oldallal, és megfordítva is, ha a mondott szög 30° vagy 150°, akkor $s_T = m_U$ (l. *a* és *b* ábra).



1a. ábra



1b ábra

Valóban, legyen UV felezőpontja T_0, továbbá T_0 és U vetülete a TV egyenesen T_1, U_1, akkor T_0T_1 az UU_1V háromszög középvonala, s így

$$T_0T_1 = \frac{1}{2}\,UU_1 = \frac{1}{2}\,m_U = \frac{1}{2}s_T = \frac{1}{2}\,T_0T,$$

vagyis a TT_0T_1 derékszögű háromszögben a T_0T_1 befogó az átfogó fele, s így TT_1-re tükrözve a háromszöget, szabályos háromszög keletkezik, tehát $T_0TT_1\sphericalangle = 30°$ vagy 150° aszerint, hogy T_1 és U_1 a TV félegyenesen vagy T-n túli meghosszabbításán van-e.

Fordítva, ha a $T_0TT_1\sphericalangle$ 30° vagy 150°, akkor a TT_0T_1 derékszögű háromszögben

$$T_0T_1 = \frac{1}{2}\,T_0T,$$

másrészt, mivel T_0T_1 az UU_1V háromszög középvonala, így

$$T_0T_1 = \frac{1}{2}\,UU_1,$$

tehát

$$s_T = m_U.$$

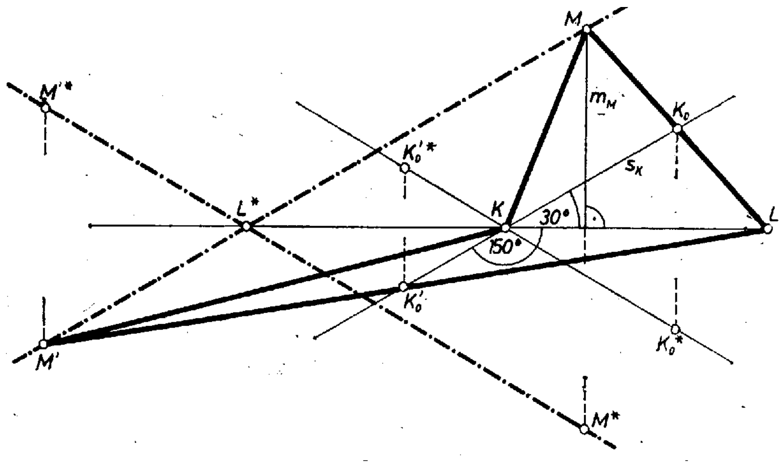
Feladatunkban az egyenlő magasság és súlyvonal közül az elsőnek a kezdőpontját a három csúcs közül háromféleképpen választhatjuk és ehhez az utóbbi kezdőpontját a maradó csúcsok közül mindig kétféleképpen, ami 6 lehetőséget jelent.

A magasságot m-mel, a súlyvonalat s-sel jelölve és indexben tüntetve fel azt a csúcsot, amelyikből indul, ezt a hat lehetséges esetet három párba sorolhatjuk az alábbi módon:

$$\begin{array}{rlrl} \text{I.} & m_M = s_K, & \text{I}'. & m_M = s_L, \\ \text{II.} & m_K = s_M, & \text{II}'. & m_L = s_M, \\ \text{III.} & m_L = s_K, & \text{III}'. & m_K = s_L. \end{array}$$

Világos, hogy az egymás mellett álló feltételekben csak K és L szerepe cserélődik meg, s így a megfelelő M pontok halmaza egymás tükörképe a KL szakasz felező merőlegesére. Elég tehát csak az I., II. és III. feltételeket kielégítő M pontokat megkeresnünk. Az is világos, hogy minden megfelelő M ponttal együtt a KL egyenesre vonatkozó tükörképére is teljesülnek a feladat feltételei.

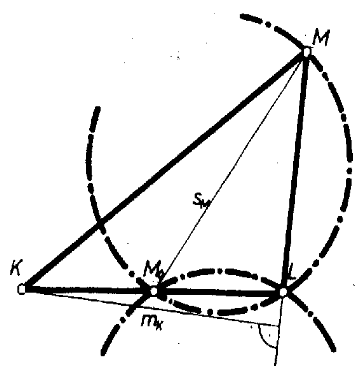
I. Az első esetben – LM felezőpontját K_0-lal jelölve – az előrebocsátott megjegyzés szerint az $LKK_0\sphericalangle$ vagy 30° vagy 150° és a KL-lel ilyen szöget bezáró két egyenes minden a K-tól különböző pontja szerepelhet K_0-ként (2. ábra).



2. ábra

Az M pont a K_0-nak az L középpontból kétszeresre nagyított képe, így annak a két egyenesnek valamelyikén van, amelyek L-nek K-ra vonatkozó L^* tükörképén mennek át és a KL egyenessel 30°-os szöget zárnak be. Ezeknek minden az L^*-tól különböző pontja megfelel M csúcsnak.

II. Jelöljük M_0-lal a KL szakasz felezőpontját. Most az LMM_0 szög 30°-os vagy 150°-os, így annak a két, az L-en és az M_0-on átmenő körnek az M_0-tól és L-től különböző pontjai elégítik ki a feltételt, amelyeknek az M_0 és L közti íveiről M_0L 30°-ban, ill. 150°-ban látszik (3. ábra).



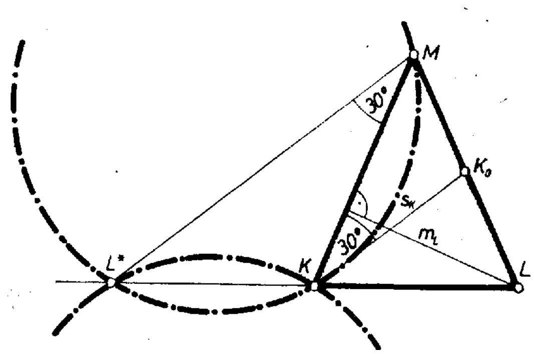
3. ábra

A körök sugara nyilvánvalóan $M_0L = KL/2$.

III. Ha végül $m_L = s_K$, akkor a K_0KM szög 30°-os vagy 150°-os. M-en át KK_0-lal párhuzamost húzva ez átmegy L^*-on és

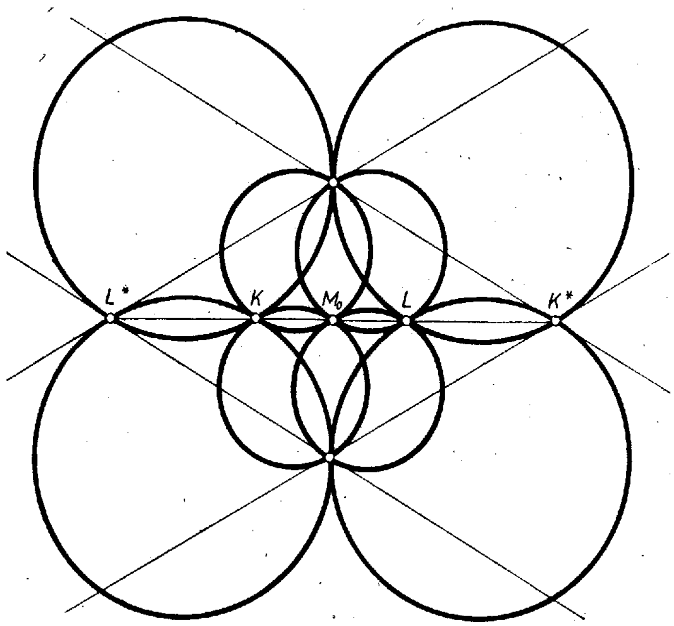
$$L^*MK\sphericalangle = MKK_0\sphericalangle,$$

tehát az M pontból most az L^*K szakasz látszik 30° vagy 150° szögben, és ismét az ezt a feltételt kielégítő mindkét kör minden az L^*-tól és K-tól különböző pontja megfelelő M-csúcs (4. ábra). A körök sugara nyilvánvalóan $KL^* = KL$.



4. ábra

Megállapításainkat egybevetve a kívánt tulajdonságú KLM háromszögek M csúcsa az 5. ábra 4 egyeneséből, 4 db $KL/2$ sugarú köréből és 4 db KL sugarú köréből álló alakzat pontja, kizárva azonban a K, L, K^*, L^* és M_0 pontokat.



5. ábra

Cserháti András (Székesfehérvár, Teleki B. Gimn., II. o. t.) dolgozatából összevonásokkal