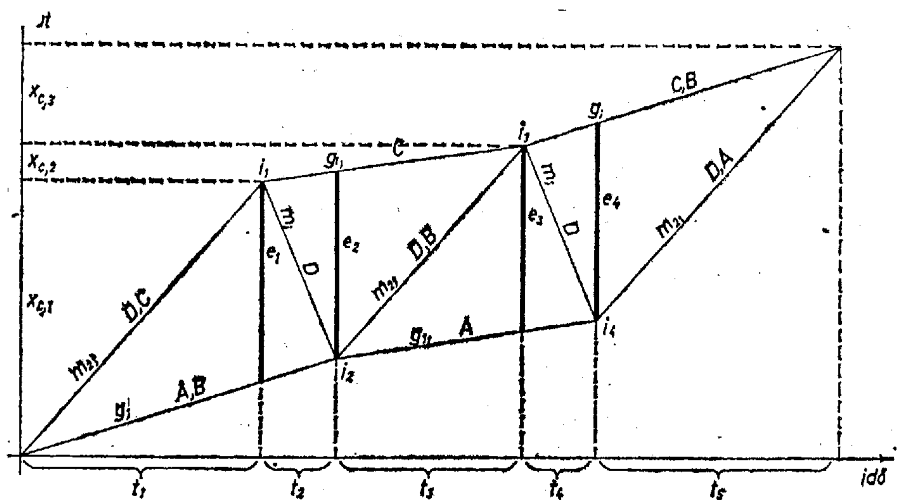
I. Tekintsük először az utazás valóságos lefolyását az első pihenőig. Természetesen föltesszük, hogy $m_2 > g$, hiszen a feladatnak csak így van gyakorlati értelme. Legyen az indulás és a motoros 1., 2., 3., 4. irányváltoztatása, valamint a pihenőhelyre való érkezés közti időközök tartama rendre t_1, t_2, t_3, t_4, t_5.



1. ábra

A 4 útitárs mozgási grafikonját ugyanabban a koordinátarendszerben ábrázolva, a meredekségek (sebességek) közti egyezésekből nyilvánvaló, hogy az ábra szimmetrikus a B motoron utazását ábrázoló egyenesszakasz felezőpontjára nézve, ezért $t_4 = t_2$, és $t_5 = t_1$. Továbbá A és C ugyanakkora utat tesznek meg a motoron, B viszont kisebbet. Egyezik még az A és C által magányosan megtett út is, valamint a B-vel párban megtett útjuk.

C a terv szerinti d távolságot a motorossal együtt $t_1 = \dfrac{d}{m_2}$ idő alatt tette meg. Ugyanezen idő alatt A és B közös útja $gt_1 = d \cdot \dfrac{g}{m_2}$, így D és C előnye a motor első visszafordulásakor

$$e_1 = d - d \cdot \frac{g}{m_2} = d \cdot \frac{m_2 - g}{m_2}.$$

Ezután D és az A, B pár $m+g$ sebességgel közeledett egymáshoz és a találkozás időpontjára az előny 0-ra csökkent, tehát

$$t_2 = \frac{e_1}{m+g} = \frac{d(m_2 - g)}{m_2(m+g)} \qquad \left(= t_1 \cdot \frac{m_2 - g}{m+g}\right).$$

Másrészt ezen időszakban C és D $m + g_1$ sebességgel távolodtak egymástól, ezért C előnye az időszak végén

$$e_2 = (m + g_1)t_2 = e_1 \cdot \frac{m + g_1}{m+g} = d \cdot \frac{m_2 - g}{m_2} \cdot \frac{m + g_1}{m + g} \qquad (< e_1).$$

A-nak és B-nek eddig megtett útja, ami – mint láttuk – megadja B-nek és C-nek az utolsó két időszakban megtett útját is

(1) $$x_{A,1} = x_{B,1} = g(t_1 + t_2) = d \cdot \frac{g(m + m_2)}{m_2(m+g)} = x_{B,3} = x_{C,3}.$$

Mialatt a motoros B-t vitte előre, $m_2 - g_1$ sebességgel közeledtek C-hez, és ugyanekkora sebességgel távolodtak A-tól. Az utolérésig eltelt idő

$$t_3 = \frac{e_2}{m_2 - g_1} = t_2 \cdot \frac{m + g_1}{m_2 - g_1} = \frac{d}{m_2} \cdot \frac{m_2 - g}{m_2 - g_1} \cdot \frac{m + g_1}{m + g} \qquad (< t_1),$$

és az időszak végén a motoros előnye A-hoz képest, mint vártuk, $e_3 = (m_2 - g_1)t_3 = e_2$.

B-nek motoron megtett útja

$$x_{B,2} = m_2 t_3 = d \cdot \frac{m_2 - g}{m_2 - g_1} \cdot \frac{m + g_1}{m + g},$$

és ez valóban kisebb d-nél, mert a kifejezésben d után álló szorzók mindegyike kisebb 1-nél (és pozitív). C eddigi gyalogútja pedig

$$x_{C,2} = g_1(t_2 + t_3) = g_1 t_2 \left(1 + \frac{m + g_1}{m_2 - g_1}\right) = g_1 t_2 \frac{m + m_2}{m_2 - g_1} = d \cdot \frac{g_1}{m_2} \cdot \frac{m_2 - g}{m_2 - g_1} \cdot \frac{m + m_2}{m + g}$$

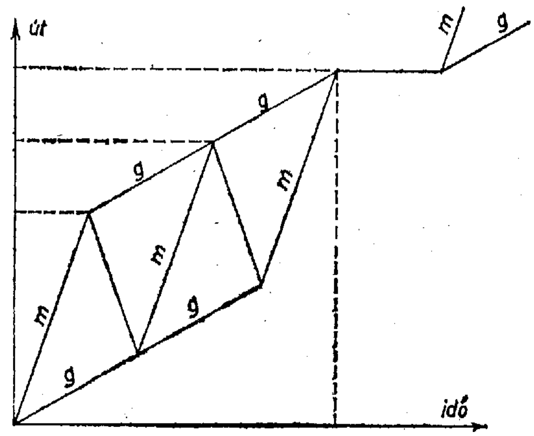
(2) $$\left(= \frac{g_1}{g} \cdot \frac{m_2 - g}{m_2 - g_1} \cdot x_{C,3}\right).$$

II. Az eddigiekből egyszerűen visszaállíthatjuk az utazás tervét, csupán m_2 helyére mindenütt m-et, g_1 helyére g-t kell írnunk.

A pihenőhelyig tervezett úthossz, a mindig elöl haladó C-re mondottak szerint, $x_{C,1}$, $x_{C,2}$ és $x_{C,3}$ alapján – másrészt a további ismétlésekre tekintettel

(3)
$$y = d + d\cdot\frac{2g}{m+g} + d\cdot\frac{2g}{m+g} = d\cdot\frac{m+5g}{m+g} = \frac{s}{3},$$

(mint előre látható volt, második és harmadik útszakasza egyenlő; a 2. ábra az utazás tervének grafikonját adja).



2. ábra

Innen pedig a pihenőhelyig tervezett menetidő (a megfelelő sebességekkel osztva):

(4)
$$t = \frac{d}{m} + \frac{4d}{m+g} = \frac{d(5m+g)}{m(m+g)}.$$

Továbbá a motor igénybevételével megtenni tervezett szakasz hossza (3)-ból

(5)
$$d = \frac{s}{3}\cdot\frac{m+g}{m+5g},$$

az első pihenőhely elérésének tervezett ideje (4)-ből és (5)-ből

(6)
$$t = \frac{s}{3m}\cdot\frac{5m+g}{m+5g},$$

végül a tervezett átlagsebesség, a T időtartamú pihenőket is figyelembe véve

$$v = \frac{s}{3t+2T} = \frac{s}{\dfrac{s}{m}\cdot\dfrac{5m+g}{m+5g} + 2T}.$$

III. A numerikus adatokkal (5)-ből $d = 140/11 = 12{,}73$ km, tehát a pihenőig terjedő 20 km-es útrészből gyalogútnak $80/11 = 7{,}27$ km-t terveztek; (6)-ból $t = 62/33$ óra $= 1$ óra 53 perc, ebből 25 perc a motoron, kb. másfél óra gyalog. Kézenfekvő tehát felvenni, hogy a pihenő időt félórának vették, ebben az esetben a célba érésig eltelt idő kb. 6 óra 40 perc, és a tervezett átlagsebesség 9 km/óra.

A megvalósult eredmények viszont a következők: $x_{C,1} = d = 140/11$ km, $x_{C,2} = 64/21$ km; $x_{C,3} = 4$ km, együtt $x = 19 + 179/231$ km $= 19{,}78$ km, vagyis $52/231 = 0{,}22$ km-rel kevesebb, mint $s/3 = 20$ km, a gyalog tett útrész $=$ $7{,}05$ km. Az eltelt rész-idők közül az első három:

$$t_1 = \frac{28}{55}\text{ óra } (= 30{,}5\text{ perc}),\ t_2 = \frac{16}{55}\text{ óra } (= 17{,}5\text{ perc}),$$
$$t_3 = \frac{544}{1155}\text{ óra } (= 28{,}2\text{ perc}),$$

a teljes idő $2(t_1+t_2)+t_3 = 2$ óra 4,2 perc.

IV. Az utazásnak az első pihenő utáni folytatására áttérve megjegyezzük, hogy (1) szerint $x_{C,3}$ mindenesetre nagyobb, mint (3) második tagja, a tervezett gyalog-részlet fele, mert

$$\frac{m+m_2}{m_2} = 1 + \frac{m}{m_2} > 2,$$

továbbá, hogy $x_{C,3}$ nem függ g_1-től. $x_{C,2}$ viszont (2) szerint g_1 értékétől függően nagyobb is, kisebb is lehet a tervezettnél, pl. $g_1 = g$ esetén $x_{C,2} = x_{C,3}$, viszont $g_1 = 0$ esetén $x_{C,2} = 0$; ennélfogva az $x = d + x_{C,2} + x_{C,3}$ út nagyobbnak is, kisebbnek is adódhat, mint $s/3$.

Így a program két ismétlésében alkalmazandó d' értékét úgy kell megválasztaniuk, hogy – a további új értékeket is az eddigi módon, de fönt alkalmazott vesszővel jelölve – teljesüljön

$$d' + x'_{C,2} + x'_{C,3} = \frac{s-x}{2}.$$

Innen d' a fentiek felhasználásával kifejezhető, mint s és a négy sebesség függvénye.

A továbbiakban csak a számpélda esetére szorítkozva, a két ismétlésben megteendő útszakasz egyenként 20,11 km, emiatt

$$d' = d\,\frac{20{,}11}{19{,}78} = 12{,}95 \text{ km},$$

a növekedés kb. 1,7%.

Ilyen arányban növekszik a program ismétléseihez felhasznált idő is, 2 óra 6 percre. Ismét félórás pihenőket megengedve, az indulástól számítva kb. 7 óra 16 perc múlva érnek célba, és így átlagsebességük kb. 8,3 km/óra.

V. A gyalog tett útrész arányszáma megállapítható már a pihenő előtti útrész eredményei alapján is. Ezt is csak a numerikus példa esetére számítjuk ki. C és A részére az arány a fentiek szerint $7{,}05/19{,}78 = 0{,}356$. B gyalog útrésze $2x_{C,3} = 8$ km, arányszáma 0,405. Ezzel a megoldást befejezettnek nyilvánítjuk.

Megjegyzés. A terv rész-eredményei természetesen jóval egyszerűbben meghatározhatók, viszont nem tehetik elkerülhetővé a megvalósult változat fenti, vagy másféle számítását.

Pl. A és B közösen megtett útszakaszát z-vel jelölve D a B felvételéig $2d - z$ utat tesz meg, ezért az utak és sebességek arányából

$$(2d - z) : z = m : g, \qquad z = d \cdot \frac{2g}{m+g}.$$

Így abból, hogy a program első szakaszának hossza

$$d + 2z = d\left(1 + \frac{4g}{m+g}\right) = \frac{s}{3},$$

adódik (5).

Gyimesi András (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., I. o. t.)