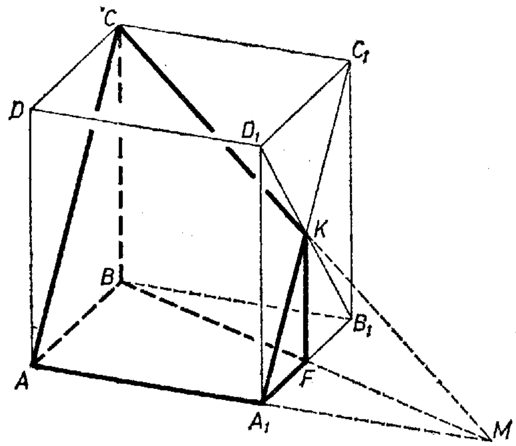
Az A, B, C, A_1, F és K csúcsokkal meghatározott konvex poliéder valóban csonkagúla, mert AA_1, BF és CK élének meghosszabbításai egy ponton mennek át, és A_1FK lapja párhuzamos az ABC lappal. Valóban, az AA_1 és BF egyenesek metszik egymást, mert benne vannak a kocka ABB_1A_1 lapjában és nem párhuzamosak. Közös pontjukat M-mel jelölve MA_1F és MAB hasonló háromszögek, mert $A_1F \parallel AB$, és $A_1F = AB/2$ miatt $MA_1 = MA/2$, tehát $MA_1 = A_1A$, M az A csúcsnak A_1-re való tükörképe. Ugyanezek állnak az AA_1 és CK egyenesek metszéspontjára is, hiszen CK benne halad a kocka ACC_1A_1 átlós síkjában, így A_1K párhuzamos AC-vel és fele akkora, tehát CK is M-ben metszi AA_1-et, amint állítottuk. Ezek szerint a csonkagúla úgy állt elő, hogy az $MABC = G$ gúlából lemetszettük az $MA_1FK = G_1$ gúlát.



Legyen a kocka éle $AB = a$, ekkor G és G_1 alapjának területe $a^2/2$, ill. $a^2/8$, magasságuk $2a$, ill. a, így térfogatuk

$$V = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{a^3}{3}, \qquad V_1 = \frac{a^2}{8} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3}{24},$$

és a csonkagúla térfogata

$$V_{\mathrm{cs}} = V - V_1 = \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{24} = \frac{7a^3}{24} = 13\,608,$$

amiből $a^3 = 24 \cdot 1944 = 3 \cdot 2^3 \cdot 9 \cdot 6^3 = (2 \cdot 3 \cdot 6)^3$, $a = 36$ hosszúságegység.

A csonkagúla oldallapjai derékszögű trapézok, mert AA_1, mint kockaél, merőleges az AB, AC élekre, továbbá $FB \perp BC$, mert FB benne van a kockaélre merőlegesen álló ABB_1A_1 kockalap síkjában. A hosszúságokat tekintve $AC = a\sqrt{2}$, $A_1K = a\sqrt{2}/2$, és BFB_1 derékszögű háromszögből $BF = a\sqrt{5}/2$; így az $ABFA_1$, $ACKA_1$, $BCKF$ oldallap területe rendre

$$\frac{3a^2}{4}, \quad \frac{3\sqrt{2}a^2}{4}, \quad \frac{3\sqrt{5}a^2}{8},$$

végül az alaplapok fent már megállapított területét is véve a felszín

$$F_{\mathrm{cs}} = a^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{3\sqrt{5}}{8}\right) = \frac{a^2}{8}(11 + 6\sqrt{2} + 3\sqrt{5}) \approx a^2 \cdot 3{,}274 \approx 4243 \text{ ter. egys.}$$

Czédli Gábor (Baja, III. Béla Gimn., I. o. t.)
Angyal József (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., I. o. t.)

Megjegyzés. Felhasználhattuk volna V_1 meghatározására azt is, hogy a két gúla hasonló, éleik aránya $1 : 2$, ezért $V_1 : V = 1 : 8$.