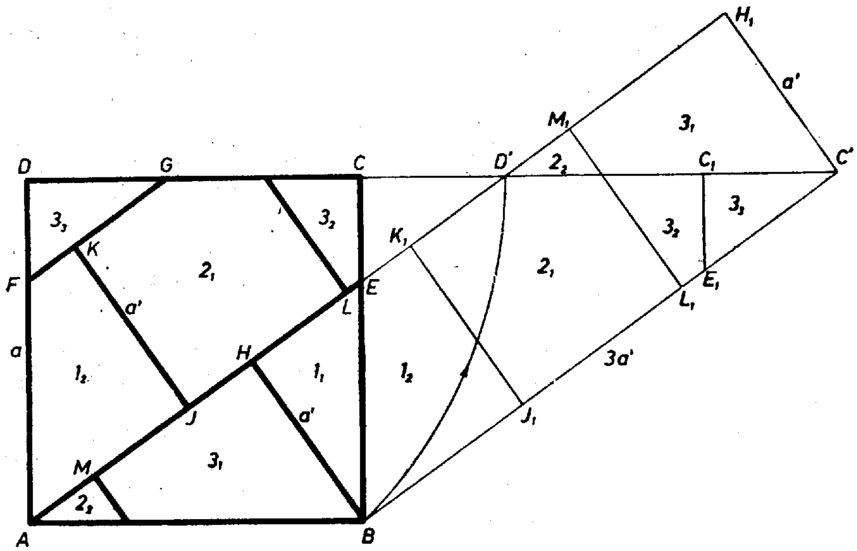
I. megoldás. *a)* Gondoljuk az a oldalú, $ABCD = N$ négyzetet átdarabolva 3 kis négyzetté. Ezek oldalhossza $a' = \sqrt{a^2/3} = a/\sqrt{3}$ Egymás mellé helyezve egy a' magasságú és $3a' = a\sqrt{3}$ alapú T téglalapot kapunk belőlük.

N-et átdaraboljuk T-be úgy, hogy A-n át egy B-től a' távolságban haladó AE egyenessel lemetszünk N-ből egy háromszöget, majd a maradó részt egy AE-től a' távolságban haladó párhuzamos FG szakasszal (1.ábra).



1. ábra

Legyen B merőleges vetülete AE-n H, az AE és DC egyenesek metszéspontja D'. Ekkor ABH és $D'AD$ hasonló háromszögek, így

$$\frac{D'D}{AD} = \frac{AH}{BH}, \quad \text{továbbá} \quad AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{2a^2/3},$$

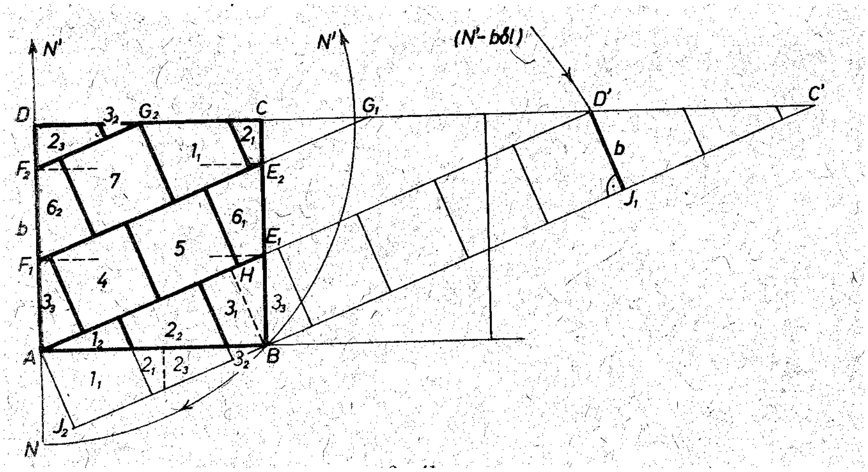
amiből

$$DD' = \frac{AD \cdot AH}{BH} = \frac{a \cdot a\sqrt{2/3}}{a/\sqrt{3}} = a\sqrt{2} = DB.$$

Eszerint D' a DC szakasz meghosszabbításán van, C-től a-nál kisebb távolságra, E tehát N-nek BC oldalára esik. F és G távolsága AE-től ugyanakkora, mint B-é, tehát $FA = BE$, $GD' = AB$ így G a CD oldalon van. (D'-t kimetszi a D körüli DB sugarú körív.)

A négyzet 3 részét, úgy illesztve össze, hogy FA csatlakozzék EB-hez, majd DF a CE új helyzetéhez, egy $ABC'D' = P$ paralelogrammát, kapunk. Ezt BH mentén átvágva és az ABH háromszöget a szemközti oldalhoz csúsztatva $D'C'H_1$ helyzetbe, megkapjuk a $T = BC'H_1H$ téglalapot. Ezt a BC' oldalára merőleges J_1K_1, L_1M_1 vágásokkal három egyenlő területű részre vágva megkapjuk a keresett kis négyzeteket, hiszen $BH = a' = a/\sqrt{3}$ s így a, terület változatlansága miatt $BC' = a^2/BH = a\sqrt{3} = 3a'$.

Felmérve AE-re az $AJ = JL = a'$, továbbá H-ból A felé a $HM = a'$ távolságot és ezekből AE-re merőleges vágásokkal feldarabolva az $AECGF$ ötszöget, ill. az ABH háromszöget, az N négyzetből nyert összesen 7 részből összerakható a három egybevágó kis négyzet. Ha viszont P-t a D'-ből induló magassággal daraboljuk át T-be, 8 rész keletkezik.



2. ábra

b) Ugyanezzel a gondolatmenettel végezhetjük a b oldalú négyzet átdarabolását 7 egybevágó négyzetbe. Most (2. ábra)

$$b' = \sqrt{\frac{b^2}{7}} = \frac{b}{\sqrt{7}} = BH, \qquad AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = b\sqrt{\frac{6}{7}},$$

$$DD' = \frac{AD \cdot AH}{BH} = \frac{AD \cdot a \cdot \sqrt{6/7}}{a/\sqrt{7}} = AD\sqrt{6} = DB \cdot \sqrt{3}.$$

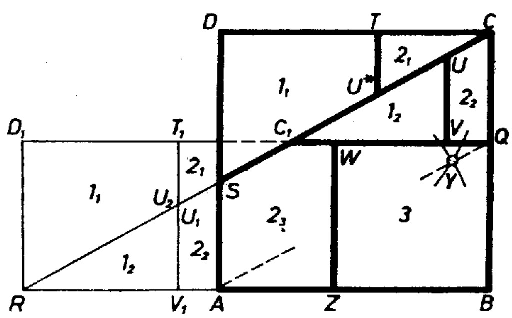
Megszerkeszthetjük tehát D'-t úgy, hogy elmetsszük a D körüli DB sugarú körívvel a DA egyenest az N, N' pontokban. D' ezekkel egy egyenlő oldalú háromszög csúcsait adja, tehát D'-t a CD egyenesből kimetszi az N körüli, NN' sugarú körív.

Mivel $2DC < DD' < 3DC$, azért az AD' vágásvonal E_1D' szakaszát a $\overrightarrow{CD}$ vektorral eltolva, az adódó F_1G_1 vágásvonal E_2G_1 szakasza kívül esik N-en, ezen megismételve az eltolást, kapjuk a vágásvonal F_2G_2 szakaszát, a keletkezett darabokból összeállíthatjuk P-t.

Ha P-t most is a B-ből induló magasság menti vágással daraboljuk át T-be, akkor a 7 kis négyzet közül egy egészben adódik, a többiek 2–2 darabból állnak össze, 13 rész keletkezik. A D'-ből húzott $D'J_1$ magasságot használva viszont 3 kis négyzet adódik egészben, 2–2 kis négyzet áll 2, ill. 3 db-ból, a részek száma így is 13; a 2. ábra ezt mutatja be.

Sashegyi László (Tatabánya, Árpád Gimn., I. o. t.)

II. megoldás. *a)* Átdarabolhatjuk N-et T-be P közbeiktatása nélkül is, úgy, hogy T rövidebb oldalát BC-re helyezzük, legyen ez BQ, és $BQD_1R = T$ (3. ábra).



3. ábra

Ekkor az RC egyenessel lemetszve N-ből a CDS háromszöget, ez hasonló RBC-hez, amiből

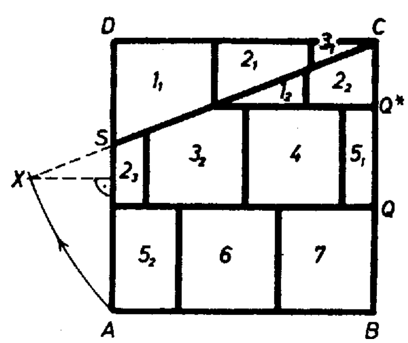
$$SD = CD \cdot \frac{BC}{RB} = \frac{CD}{\sqrt{3}} = BQ.$$

RC és D_1Q metszéspontját C_1-gyel jelölve így

$$D_1C_1 = DC, \qquad SA = DA - DS = BC - BQ = CQ,$$

tehát RC_1D_1 és RAS éppen lefedhető az SCD és C_1QC háromszöggel, mert oldalaik párhuzamosak és egy-egy megfelelő oldalpárjuk egyenlő. Az ábrán $BZ = ZV_1 = BQ$, a V_1U_1 és U_2T_1 vágásvonalat visszatoltuk a VU, ill. U^*T helyzetbe, ezek, valamint ZW mentén elvágva a részeket, a keletkezett 6 darabból a 3 kis négyzet összeállítható.

Azt is könnyű belátni, hogy A, Q és Q-nak AB-re való tükörképe egy egyenlő oldalú háromszög csúcsai, tehát $BAQ\sphericalangle = 30°$, $DAQ\sphericalangle = 60°$ tehát Q kimetszhető a DA oldal fölé rajzolt ADY egyenlő oldalú háromszög AY oldalegyenesével. – Azt is mondhatjuk, hogy a $QAB\sphericalangle = \alpha$ szögre fennáll tg $\alpha = a'/a = 1/\sqrt{3}$.



4. ábra

b) Hasonlóan készült a 4. ábrán látható feldarabolás, $BQ = QQ^* = DS = b' = b/\sqrt{7} = b\ \mathrm{tg}\ SCD\sphericalangle$. Ebből $\sin SCD\sphericalangle = 1/\sqrt{8} = 1/(2\sqrt{2})$, és S-et AD-ből kimetszi az a CX egyenes, ahol X a C körüli, CA sugarú kör és az AD szakasz felező merőlegesének metszéspontja. Így N-nek 12 részre való darabolása útján állíthatjuk össze a 7 egybevágó négyzetet.

Donga György (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., I. o. t.)
Fodor Péter (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., I. o. t.)

Megjegyzés. A négyzetnek 5, ill. 10 egybevágó kisebb négyzetbe való átdarabolása – amit az 1142. gyakorlatban láttunk[1] – lényegében azonos az I. megoldással, ott $DD' = 2AB$, ill. $3AB$, és az ábrákon négyes forgási szimmetria lépett fel. Ezekben az esetekben a II. megoldás értelemszerű átvitele több részre való és a 4-es forgási szimmetriát nem mutató átdarabolást eredményezne; ugyanígy $n = 2$ esetén is.

[1] K. M. L. 36 (1968) 117. o.