I. A házi feladatban meghatározandó H szám fele, harmada, ötöde is természetes szám, tehát H 2-vel, 3-mal, 5-tel osztható:

$$H = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma} \cdot H_1 \tag{3}$$

alakú, ahol α, β, γ, H_1 természetes számok, és H_1 a 2, 3, 5 prímszámok egyikével sem osztható. (3) alapján H fele, harmada, ötöde rendre

$$\frac{H}{2} = 2^{\alpha-1} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma} \cdot H_1, \qquad \frac{H}{3} = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta-1} \cdot 5^{\gamma} \cdot H_1, \qquad \frac{H}{5} = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma-1} \cdot H_1,$$

tehát $H/2$ csak úgy lehet köbszám, ha $\alpha - 1$, β, γ osztható 3-mal, $H/3$ csak úgy lehet egy természetes szám ötödik hatványa, ha α, $\beta - 1$, γ osztható 5-tel, végül $H/5$ akkor négyzetszám, ha α, β páros, γ páratlan.

H nyilván akkor a legkisebb, ha α, β, γ, H_1 a lehető legkisebb. Így $H_1 = 1$, és emiatt elegendő a fenti feltételeknek eleget tevő legkisebb α, β, γ számokat meghatározni. α osztható 2-vel, 5-tel, így 10-zel is; β osztható 6-tal és γ osztható 15-tel. A legkisebb ilyen

$$\alpha = 10, \qquad \beta = 6, \qquad \gamma = 15$$

értékrendszer a további követelményeknek is eleget tesz ($\alpha - 1$ osztható 3-mal, $\beta - 1$ osztható 5-tel, $\gamma - 1$ páros) tehát H legkisebb értéke:

$$H = 2^{10} \cdot 3^{6} \cdot 5^{15}. \tag{4}$$

II. Hasonlóan (1), ill. (2) legkisebb megoldása:

$$P = 2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^{6}, \qquad S = 2^{6} \cdot 3^{15} \cdot 5^{10}. \tag{5}$$

Mármost (4)-ből és (5)-ből

$$\frac{H}{S} = \frac{2^4 \cdot 5^5}{3^9} = \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^4 > 1, \qquad \text{tehát} \qquad S < H,$$

$$\frac{P}{S} = \frac{2^9}{3^5 \cdot 5^4} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{15}\right)^4 < 1, \qquad \text{tehát} \qquad P < S,$$

és így a H, P, S számok legkisebbike P.

Csetényi Artúr (Kiskunhalas, Szűcs J. Ált. Isk., 8. o. t.)