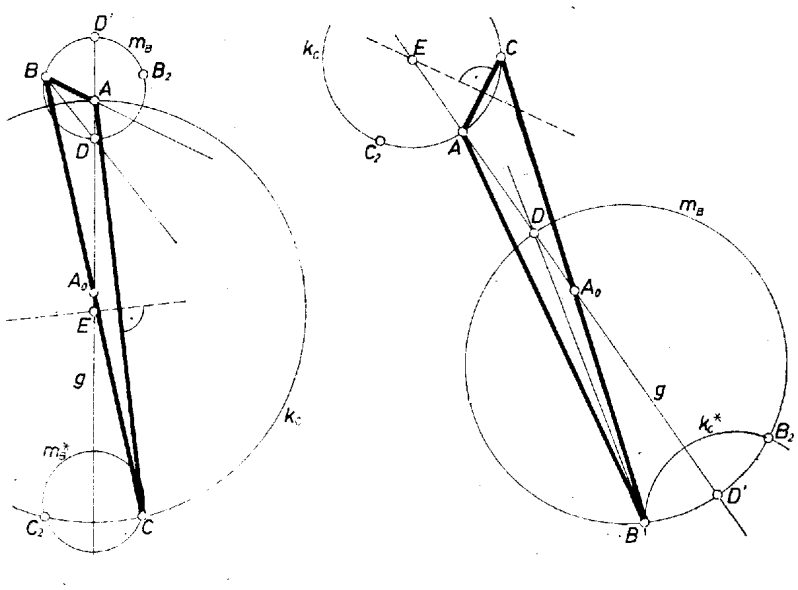
Azok a C pontok, amelyekre az AC szakasz felező merőlegese átmegy E-n, E-től EA távolságra vannak. Megfordítva, az E középpontú, A-n átmenő k_C kör minden, az A-tól különböző C pontjára teljesül is ez a feltétel. Mégis ki kell zárnunk az A-val átellenes pontot is, mert az ABC háromszög C csúcsa nem lehet az AA_0 súlyvonalon.



A D pont alapján meg tudjuk határozni azoknak a pontoknak az m_B mértani helyét, amelyek megfelelnek B csúcsként. És mivel még C a B-nek A_0-ra vonatkozó tükörképe, azért m_B-nek A_0-ra vonatkozó tükörképe szintén tartalmazza a C csúcsot, így ennek a k_C-vel közös pontjai megadják a megfelelő C csúcsokat, továbbá ezeknek A_0-ra vonatkozó tükörképei rendre a hozzájuk tartozó B csúcsot.

A D pont egyszersmind az AA_0B háromszög B-ből induló belső szögfelezőjének is AA_0-lal való metszéspontja, ezért a B-ből induló (ismeretlen) oldalak $BA : BA_0$ aránya egyenlő az AA_0 oldalon keletkezett, ismert szakaszok $DA : DA_0 = k$ arányával. Így m_B azon pontok mértani helye, amelyekre nézve az adott A, A_0 pontoktól mért távolságok aránya egyenlő két adott szakasz arányával.

Mármost ha $k = 1$, vagyis D éppen felezi az AA_0 szakaszt, akkor e szakasz felező merőlegese adja m_B-t. Ha pedig $k \neq 1$, akkor, mint ismeretes, m_B egy kör, éspedig az A, A_0 alappontokhoz és a k arányértékhez tartozó ún. Apollóniosz-féle kör. Pontosabban véve: sem a felező merőlegesnek, sem az Apollóniosz-körnek nem felel meg az adott pontokat tartalmazó g egyenesen levő D, ill. D és D' pontja, hiszen a keresett háromszög B csúcsa sem lehet rajta az AA_0 súlyvonalon; viszont minden más pontjuk megfelel B-ként.

Ezzel a feladatot megoldottuk, csupán $k \neq 1$ esetére az m_B kör egy megszerkesztési módját idézzük emlékezetbe. Elég az említett D' pontot megszerkeszteni, mert DD' az m_B-nek átmérője (hiszen a középpontja g-n van; ha ugyanis egy B pont eleget tesz a $BA : BA_0 = k$ feltételnek, akkor ugyanez a g-re vonatkozó tükörképére is áll). Húzzunk A-ból egy a g-hez hajló h félegyenest és fordítsuk rá A körül a D pontot a H helyzetbe, majd az A_0-on átmenő, h-val párhuzamos és egyirányú h_0 félegyenesre fordítsuk rá A_0, körül D-t a H_0 helyzetbe, ekkor D'-t a HH_0 egyenes metszi ki g-ből. ($k \neq 1$ miatt $AH \neq A_0H_0$, HH_0 nem párhuzamos g-vel, D' mindig létrejön.)

A fentiek szerint C megfelelő helyzeteit m_B-nek A_0-ra vett m_B^* tükörképe metszi ki k_C-ből. A megfelelő pontok száma 2 vagy 0, ugyanis k_C és m_B^* érintkezése esetén nincs megoldás, hiszen csak g valamely pontjában érinthetnék egymást, az ilyen pontokat pedig kizártuk. Metszés esetén mindkét C-helyzetet elfogadjuk – bár egymás képei g-re vonatkozóan –, mert *helyzet*-adatokból indultunk ki, ezért B és C helyzete volt megszerkesztendő, másrészt B és C szerepe nem cserélhető fel.

Minthogy a feladatot kizárólag mértani helyek megszerkesztésére vezettük vissza, azért nincs szükség annak külön bizonyítására, hogy a kapott ABC háromszögek megfelelnek a követelményeknek.

Az adott pontok közül D csak az AA_0 szakasz belső pontja lehet, E viszont g-nek bármely, az A-tól különböző pontja. Amennyiben E azonos A_0-lal, akkor a háromszög A-nál derékszögűnek adódik, hacsak $DA : DA_0 < 2$.

Török Gyula (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)
Szendrei Ágnes (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn.)