Az egyenlet bal oldalát szorzattá alakíthatjuk, ugyanis az első 3 tagból x^6-ot, a további 3-ból -64-et kiemelve a két zárójelben ugyanaz a polinom adódik:

$$x^6(x^4-5x^2+4)-64(x^4-5x^2+4)=(x^6-64)(x^4-5x^2+4),$$

így (1) gyökei mindazok az x értékek, amelyek mellett a két tényező közül legalább az egyiknek az értéke 0, vagyis amelyekre

$$\text{vagy}\quad x^6-64=0, \tag{2}$$

$$\text{vagy}\quad x^4-5x^2+4=0. \tag{3}$$

(2) bal oldala az $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ azonosság alapján tovább bontható:

$$x^6-64=\left(x^2\right)^3-4^3=(x^2-4)(x^4+4x^2+16),$$

tehát (2) teljesül, ha

$$x^2-4=(x-2)(x+2)=0, \quad \text{és ha} \tag{4}$$

$$x^4+4x^2+16=\left(x^2+4\right)^2-4x^2=(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)=0. \tag{5}$$

(3) pedig így írható:

$$(x^4-4x^2)-(x^2-4)=(x^2-1)(x^2-4)=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)=0.$$

eszerint gyökei:

$$x_1=-1, \qquad x_2=1, \qquad x_3=-2, \qquad x_4=2. \tag{6}$$

(4) nem ad új gyököt, mert csak a talált x_3-ra és x_4-re teljesül, (5)-nek pedig nincs (valós) gyöke; mert bal oldalának mindkét tényezője minden (valós) x-re pozitív:

$$x^2-2x+4=\left(x-1\right)^2+3>0,$$
$$x^2+2x+4=\left(x+1\right)^2+3>0.$$

Ezek szerint (1) gyökei a (6) alatti számok.

Pető János (Budapest, Kölcsey F. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. x_3 és x_4 kétszeres gyöke (1)-nek, ugyanis a többszöri felbontás alapján (1) bal oldala így írható:

$$(x+1)(x-1)\left(x+2\right)^2\left(x-2\right)^2(x^2-2x+4)(x^2+2x+4).$$

2. A (2) bal oldalát az idézett azonosság alapján így is bonthatjuk:

$$x^6-64=(x^3-8)(x^3+8)=(x-2)(x^2+2x+4)(x+2)(x^2-2x+4).$$