I. megoldás. Célszerű lesz általában megállapítani, hogy két elsőfokú kifejezés négyzetének az összege milyen feltétel mellett egyenlő egy elsőfokú kifejezés négyzetével, mert ezt mindegyik kérdésre adandó válaszban felhasználhatjuk. Legyen tehát α, β, γ, δ tetszés szerinti négy szám, és vizsgáljuk az

$$(\alpha x+\beta)^2+(\gamma x+\delta)^2=(\alpha^2+\gamma^2)x^2+2(\alpha\beta+\gamma\delta)x+\beta^2+\delta^2$$

polinomot. Ha itt $\alpha=\gamma=0$, akkor egy nem negatív konstanssal van dolgunk, ami valóban egy konstans négyzete. Ha nem ez az eset, akkor egészítsük ki teljes négyzetté a kifejezést:

$$\left(\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}x+\frac{\alpha\beta+\gamma\delta}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}\right)^2+\beta^2+\delta^2-\frac{(\alpha\beta+\gamma\delta)^2}{\alpha^2+\gamma^2}=\left(\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}x+\frac{\alpha\beta+\gamma\delta}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}\right)^2+\frac{\alpha^2\delta^2+\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta\gamma\delta}{\alpha^2+\gamma^2}.$$

A kifejezés akkor és csak akkor egy elsőfokú kifejezés négyzete; ha az utolsó tört 0. Ennek számlálója $(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$, így másodfokú polinomunk akkor és csak akkor egy elsőfokúnak a négyzete, ha

$$\alpha\delta=\beta\gamma. \tag{4}$$

(Ez teljesül az $\alpha=\gamma=0$ esetben is, így pontosabban „legfeljebb másodfokú” és „legfeljebb elsőfokú” polinomot kell mondanunk.)

a) Az (1) alatti első kifejezésben

$$\alpha=1,\quad \beta=3,\quad \gamma=7,\quad \delta=p,$$

így (4) a $p=21$ értéket adja. A második kifejezés esetében

$$\alpha=3,\quad \beta=5,\quad \gamma=p,\quad \delta=q,$$

s így (4)-ből $3q=5p=105$, azaz $q=35$. Valóban

$$(x+3)^2+(7x+21)^2=\left(\sqrt{50}x+3\sqrt{50}\right)^2 \quad \text{és}$$
$$(3x+5)^2+(21x+35)^2=\left(3\sqrt{50}x+5\sqrt{50}\right)^2.$$

b) A (2) alatti mind a két kifejezés (4) szerint akkor és csak akkor egy-egy legfeljebb elsőfokú kifejezés négyzete, ha

$$aB=bA \qquad \text{és} \qquad bC=cB.$$

A két feltételt összeszorozva

$$abBC=bcAB, \qquad \text{azaz} \qquad bB(aC-cA)=0.$$

Mivel feltétel szerint b és B nem 0, így

$$aC-cA=0, \qquad aC=cA,$$

és ebből (4) alapján következik, hogy a (3) kifejezés is egy legfeljebb elsőfokú kifejezés négyzete.

Csíkvári András (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Vizsgáljuk x-nek az egyes kifejezések által előállított függvényét, és azt, hogy ezek hogyan válhatnak 0-vá. Két négyzet összege csak úgy lehet 0, ha mind a két négyzet 0, másrészt egy elsőfokú kifejezés négyzete eltűnik arra az x értékre, amelyre az alap 0 lesz. A feladat tehát azt kívánja mindegyik esetben, hogy a két-két összeadott négyzet alapja ugyanarra az x értékre tűnjön el.

a) Az (1) alatti első, ill. második kifejezés esetében a megfelelő x értékek

$$x_1=-3=-\frac{p}{7} \quad \text{és} \quad x_2=-\frac{5}{3}=-\frac{q}{p},$$

és innen, mint az első megoldásban is, a

$$p=21, \quad q=\frac{5}{3}p=35$$

értékek adódnak.

b) A (2) alatti kifejezések esetében ezek az értékek

$$x_3=-\frac{b}{a}=-\frac{B}{A} \quad \text{és} \quad x_4=-\frac{c}{b}=-\frac{C}{B}.$$

Ha ezek az összefüggések fennállnak, akkor összeszorzással innen

$$\frac{c}{a}=\frac{C}{A}$$

adódik. E két tört közös értékét λ-val jelölve, és c-t, ill. C-t innen kifejezve a (3) polinom így alakul:

$$(\lambda ax+a)^2+(\lambda Ax+A)^2=\left[\sqrt{a^2+A^2}(\lambda x+1)\right]^2,$$

ami valóban egy elsőfokú kifejezés négyzete.

Dettai István (Pannonhalma, Bencés Gimn., II. o. t.) dolgozatának felhasználásával