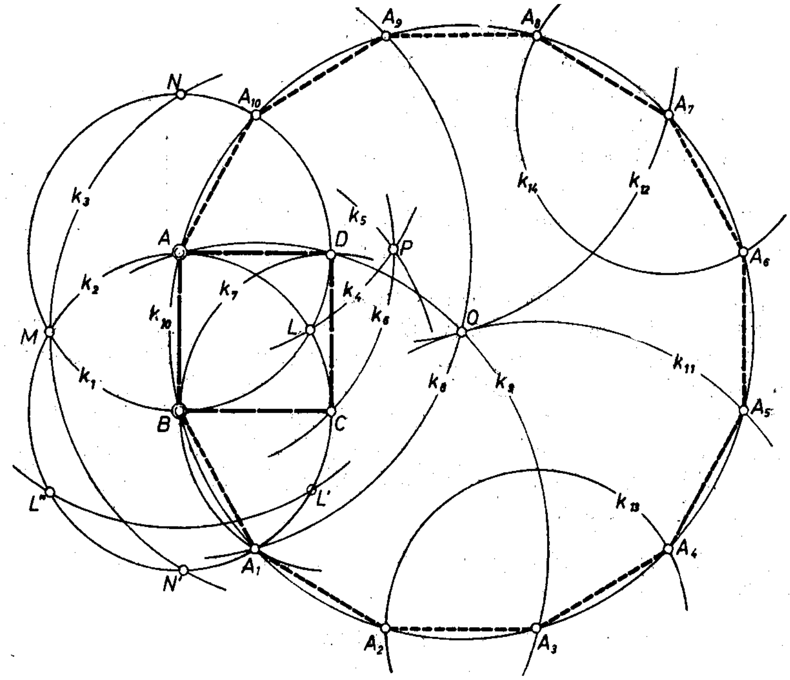
a) A keresett négyzet további két csúcsát C-vel, D-vel jelöljük, minden más betű előkészítő (segéd-)pontokat jelöl.

Megoldottuk a feladatot, ha sikerül a négyzet AC és BD átlója céljára $\sqrt{2} \cdot AB$ hosszúságú szakaszt szerkeszteni. Könnyen tudunk $\sqrt{3} \cdot AB$ hosszúságot szerkeszteni, ekkora pl. az A és a B középpontú, AB sugarú körök közös húrja. Most már a $2AB$ alapú, $\sqrt{3} \cdot AB$ szárú egyenlő szárú háromszög magassága a keresett távolságot nyújtja. Ez szintén megszerkeszthető csak körzővel. A szerkesztés aránylag kevés körrel a következő módon hajtható végre.

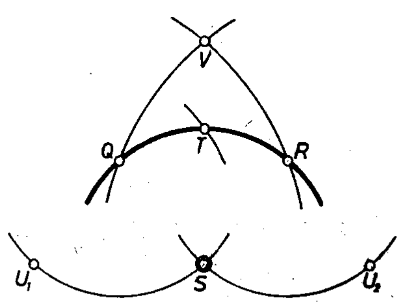


1. ábra

Legyen az A pont körüli, AB sugarú kör – röviden: az $A(AB)k_1$ kör – és a $B(BA) = k_2$ kör két metszéspontja L, M (1. ábra), továbbá k_1 és az $L(LM) = k_3$ kör M-től különböző metszéspontja N, az $N(LM) = k_4$ és $B(LM) = k_5$ körök egyik metszéspontja P. Ekkor C-t k_2-ből az $A(AP) = k_6$ kör metszi ki, D pedig k_1 és a $C(AB) = k_7$ kör metszéspontja. (Elég C-ként az egyik metszéspontot venni, mert a másik metszéspont az elsőnek a tükörképe az AB egyenesre nézve.)

A szerkesztés szerint ABL és ABM egyenlő oldalú háromszögek, $LAM\sphericalangle = LAB\sphericalangle + BAM\sphericalangle = 2 \cdot 60° = 120°$, eszerint LM a k_1-be írt egyenlő oldalú háromszög oldala, ezért LN is az, $LAN\sphericalangle = 120°$, tehát N a B pont tükörképe A-ra nézve. Így a PBN háromszög egyenlő szárú, és alapjának felezőpontja A, ezért $PAB\sphericalangle = 90°$. Továbbá $AMBL$ rombusz, emiatt[1] $AB^2 + LM^2 = 4AL^2$, $LM^2 = 3AB^2$, ezért az ABP derékszögű háromszögben $AP^2 = BP^2 - AB^2 = LM^2 - AB^2 = 2AB^2$, vagyis $AC^2 = 2 \cdot AB^2$; eszerint C megfelel a követelménynek, D pedig paralelogrammává, négyzetté egészíti ki az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszöget.

b) A szabályos 12-szöget az előbbi $ABCD$ négyzet felhasználásával abból szerkesztjük, hogy egy szöge $150° = 90° + 60°$, tehát B-vel, A-val szomszédos A_1, ill. A_{10} csúcsa a BC, ill. AD oldal fölé kifelé szerkesztett szabályos háromszög csúcsa (2. ábra).



2. ábra

További csúcsai legyenek A_2, A_3, …, A_9. Az A_1 csúcs már ki van tűzve, mint k_2 és k_7 metszéspontja. Legyen az $A(AA_1) = k_8$ és $A_1(AA_1) = k_9$ körök C-hez közelebbi metszéspontja O, ekkor az $O(AA_1) = k_{10}$ kör a k_1, k_8 és k_9

[1]Paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő oldalainak négyzetösszegével, lásd legutóbb az 1040. gyakorlatban, K. M. L. 33 (1966) 152. o.

körből kimetszi rendre az A_{10}, A_9, A_3 pontot, k_{10}-ből pedig az $A_3(AA_1) = k_{11}$ az A_5-öt, $A_9(AA_1) = k_{12}$ az A_7-et, végül $A_3(AB) = k_{13}$ és $A_7(AB) = k_{14}$ az A_2, A_4, A_6, A_8 csúcsot.

E lépéseket az indokolja, hogy $AA_1A_3A_5A_7A_9$ a 12-szög köré írt körnek beírt szabályos hatszöge, ezért a kör középpontjából AA_1 60° szögben látszódik, ennek megfelel O, és a körülírt kör k_{10}.

Úry László (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., I. o. t.)

Megjegyzések. 1. A_1-et a C pont felhasználása nélkül is megkaphatjuk abból, hogy LBA_1 egyenlő szárú derékszögű háromszög, a szükséges körívek száma így is 7. (A k_2-be írt $ALL'N'L''M$ szabályos hatszög csúcsait használjuk fel, N'-t kimetszi k_3, L'-t és L''-t pedig az $A(LM)$ kör.)

2. C-t tekinthetjük az LL' és AN' ívek, A_1-et pedig az $L'N'$, LL'' ívek felezőpontjának is. Az ezeket kijelölő eljárás általánosításaként megemlítjük, hogyha adott egy QR körív és az ezt tartalmazó kör S középpontja, akkor körző használatával kijelölhető az ív T felezőpontja (2. ábra): az U_1, U_2 pontokkal mint negyedik csúccsal paralelogrammává egészítjük ki az SRQ, SQR háromszögeket, az S-sel felezett U_1U_2 szakasz fölött U_1R szárral U_1U_2V egyenlő szárú háromszöget szerkesztünk, végül a QR ívet metsszük az $U_1(SV)$ körrel, a metszéspont T. A bizonyítást az olvasóra hagyjuk.

Váli László (Budapest, I. István Gimn., II. o. t.)

3. A most mondott ívfelezés néhány előkészítő lépés után végrehajtható akkor is – szintén kizárólag körző használatával –, ha csak a QR *ív* adott, de tudjuk, hogy az egy *kör* része (körív hiányzó középpontjának megszerkesztése, ún. Napóleon-szerkesztés).

4. Az érdeklődők az 1294. feladatban – K. M. L. 29 (1964) 136. o. – megtalálhatják a szabályos ötszög csúcsainak csak körzővel való megszerkesztését, ha adott két szomszédos vagy két másodszomszédos csúcsa.