Képezzük az (1) sorozat a_n és a_{n+2} tagja számtani közepének felét, így az állítás szerint a_{n+1}-et kell kapnunk. Valóban,

$$\frac{a_n + a_{n+2}}{4} = \frac{1}{8\sqrt{3}}[(2+\sqrt{3})^{n+2} + (2+\sqrt{3})^n] - \frac{1}{8\sqrt{3}}[(2-\sqrt{3})^{n+2} + (2-\sqrt{3})^n] =$$
$$= \frac{(2+\sqrt{3})^{n+1}}{8\sqrt{3}}\left[2+\sqrt{3}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right] - \frac{(2-\sqrt{3})^{n+1}}{8\sqrt{3}}\left[2-\sqrt{3}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right]$$

és itt mindkét szögletes zárójel értéke

$$(2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4,$$

hiszen $2+\sqrt{3}$ és $2-\sqrt{3}$ egymás reciprokai; ennélfogva

$$\frac{a_n + a_{n+2}}{4} = \frac{1}{2\sqrt{3}}[(2+\sqrt{3})^{n+1} - (2-\sqrt{3})^{n+1}] = a_{n+1},$$

ami a bizonyítandó állításnak az egymás utáni tagármasok közti összefüggésre vonatkozó része.

Ez a tulajdonság a sorozatot akkor határozza meg, ha ismert a sorozat két tagja is. Pl. a_1-ből és a_2-ből $a_3 = 4a_2 - a_1$, $a_4 = 4a_3 - a_2, \ldots$ Mármost az idézett sorozat első két tagja 1 és 4 volt, (1)-ből pedig

$$a_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}[(2+\sqrt{3}) - (2-\sqrt{3})] = 1,$$
$$a_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}[(2+\sqrt{3})^2 - (2-\sqrt{3})^2] = 4,$$

tehát a két sorozat valóban azonos.

Gáspár Gyula (Miskolc, Vörösmarty úti Ált. Isk. 8. o. t.)