I. megoldás. A bizonyítandó (3) egyenlőség bal oldalán n azonos felépítésű tag (szorzat) áll; $n = 1$ esetén a bal oldal egyetlen tagja azonos a jobb oldallal.

$n > 1$ esetén a föltevés szerint

$$y_0 + y_1 = p(x_0 + x_1) + 2q,$$

így (3) bal oldalának első tagja

$$t_1 = p(x_1^2 - x_0^2) + 2q(x_1 - x_0);$$

ugyanígy a második tag, majd az első két tag s_2 összege

$$t_2 = p(x_2^2 - x_1^2) + 2q(x_2 - x_1),$$
$$s_2 = t_1 + t_2 = p(x_2^2 - x_0^2) + 2q(x_2 - x_0),$$

és itt a változók 1-es indexű értékei nem szerepelnek, az összegben kiestek.

Ugyanígy az első 3, az első 4, … tag összegét felírva, benne az x_0, y_0 értékpáron kívül csak egyféle index, az x_3, y_3, ill. x_4, y_4, … értékpár lép fel, a közbülső indexű értékek kiesnek. Ebből sejtjük, hogy az első i tag összege bármely $i (> 0)$ esetén ilyen alakú:

(4)
$$s_i = p(x_i^2 - x_0^2) + 2q(x_i - x_0).$$

Valóban, az $i + 1$-edik tag

$$t_{i+1} = (y_i + y_{i+1})(x_{i+1} - x_i) = p(x_{i+1}^2 - x_i^2) + 2q(x_{i+1} - x_i),$$

és így az első $i + 1$ tag összege

$$s_{i+1} = s_i + t_{i+1} = p(x_{i+1}^2 - x_0^2) + 2q(x_{i+1} + x_0),$$

ami azonos (4)-gyel, ha az i indexeket $i + 1$-gyel pótoljuk. Ezzel bebizonyítottuk, hogy (4) helyes.

Ezt $i = n$ esetére alkalmazva (3) bal oldala, kellő további alakítással

$$s_n = p(x_n^2 - x_0^2) + 2q(x_n - x_0) = (px_n + px_0)(x_n - x_0) + 2q(x_n - x_0) =$$
$$\big[(px_n + q) + (px_0 + q)\big](x_n - x_0) = (y_n + y_0)(x_n - x_0),$$

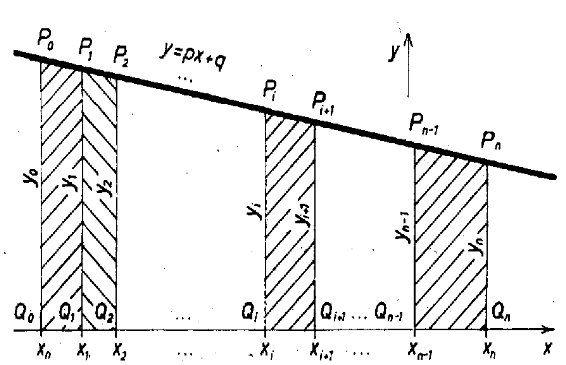
azonos a jobb oldallal. Eszerint az állítás helyes.

A bizonyításban nem volt szükség az (1) egyenlőtlenségre, tehát az állítás anélkül is érvényes (az $y = px + q$ függvény minden x-re értelmezve van).

Számításunk $p = 0$ esetén is érvényes, ebben az esetben azonban közvetlenül könnyebben belátható. Ekkor $y_0 = y_1 = \ldots = y_n = q$, a (3)-beli szorzatok első tényezője $2q$, közös.

Martoni Viktor (Veszprém, Lovassy L. Gimn., I. o. t.)
Akar László (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., I. o. t.)

II. megoldás. α) Egyszerű geometriai jelentést tulajdoníthatunk (3)-nak, ha a (2) értékek egyike sem negatív, ebben (1)-et is felhasználjuk.



(1) és (2) összetartozó értékpárjai a derékszögű koordináta-rendszerben az $y = px + q$ függvény képén, ami egyenes vonal, $n + 1$ pontot jelölnek ki, legyenek ezek rendre P_0, P_1, …, P_n, és legyen az x tengelyen levő vetületük rendre Q_0, Q_1, Q_2, …, Q_n. Két-két szomszédos pontpár: P_i, Q_i. és P_{i+1}, Q_{i+1}, ahol $i =$
$= 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, egy derékszögű trapéz négy csúcsa, hiszen $P_iQ_i \mid_{i+1} Q_{i+1} \perp Q_iQ_{i+1}$, a trapéz párhuzamos oldalainak hossza $P_iQ_i = y_i$, $P_{i+1}Q_{i+1} = y_{i+1}$, magassága pedig $Q_iQ_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ (> 0). Másrészt a $P_0Q_0Q_nP_n = T$ négyszög is derékszögű trapéz, ennek párhuzamos oldalai y_0 és y_n, magassága $x_n - x_0$. Ha $y_0 = 0$,vagy $y_n = 0$, akkor

Q_0 azonos P_0-lal, ill. Q_n azonos P_n-nel, a trapézsorozat elején vagy a végén egy derékszögű háromszög áll, és ekkor T is elfajul a $P_0Q_nP_n$, ill. $P_0Q_0P_n$ derékszögű háromszöggé. Ha pedig $p=0$ és $q>0$, akkor speciálisan téglalapokat határoznak meg a mondott pontpárok és a P_0, Q_0 és P_n, Q_n párok is.

Mármost (3) jobb oldala a T trapéz területének 2-szeresét jelenti, a bal pedig annak az n trapéznak a 2-szereséből képezett összeg, amelyre T-t az alapjaival párhuzamos P_1Q_1, P_2Q_2, ..., $P_{n-1}Q_{n-1}$ szakaszok felosztják, így (3) helyessége nyilvánvaló.

β) Ha a (2) számok között negatív is van, jelölje közülük a legkisebbiket y^*. Így az

$$y_i^* = y_i - y^*$$

számok nem negatívok, és az $y=px+q-y^*$ függvény megfelelő helyen felvett értékeivel egyenlők, tehát az α) rész szerint érvényes rájuk, hogy

$$(y_0^*+y_1^*)(x_1-x_0)+\ldots+(y_{n-1}^*+y_n^*)(x_n-x_{n-1})=(y_0^*+y_n^*)(x_n-x_0) \tag{3*}$$

Mármost (3*) bal oldala a

$$-2y^*(x_1-x_0)-\ldots-2y^*(x_n-x_{n-1})=-2y^*(x_n-x_0)$$

értékkel nagyobb (3) bal oldalánál, és ugyanennyivel nagyobb (3*) jobb oldala is (3) jobb oldalánál, tehát (3) is igaz. (A „nagyobb” állításnál természetesen figyelembe veendő, hogy $y^*<0$.)

Kovács Miklós (Miskolc, Földes F. Gimn., II. o. t.)