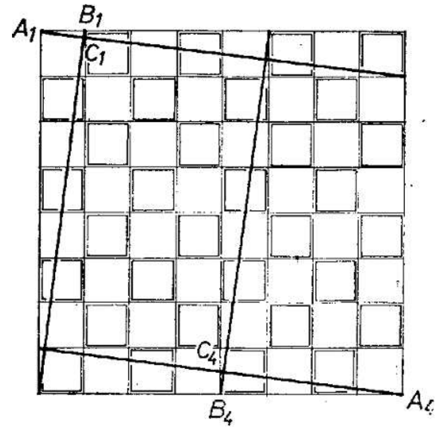
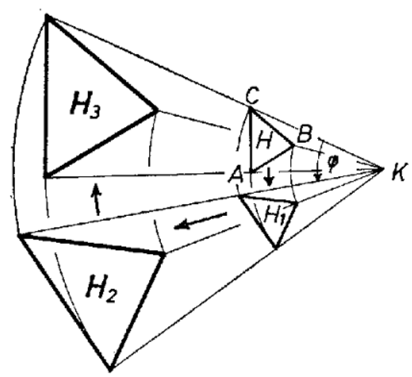


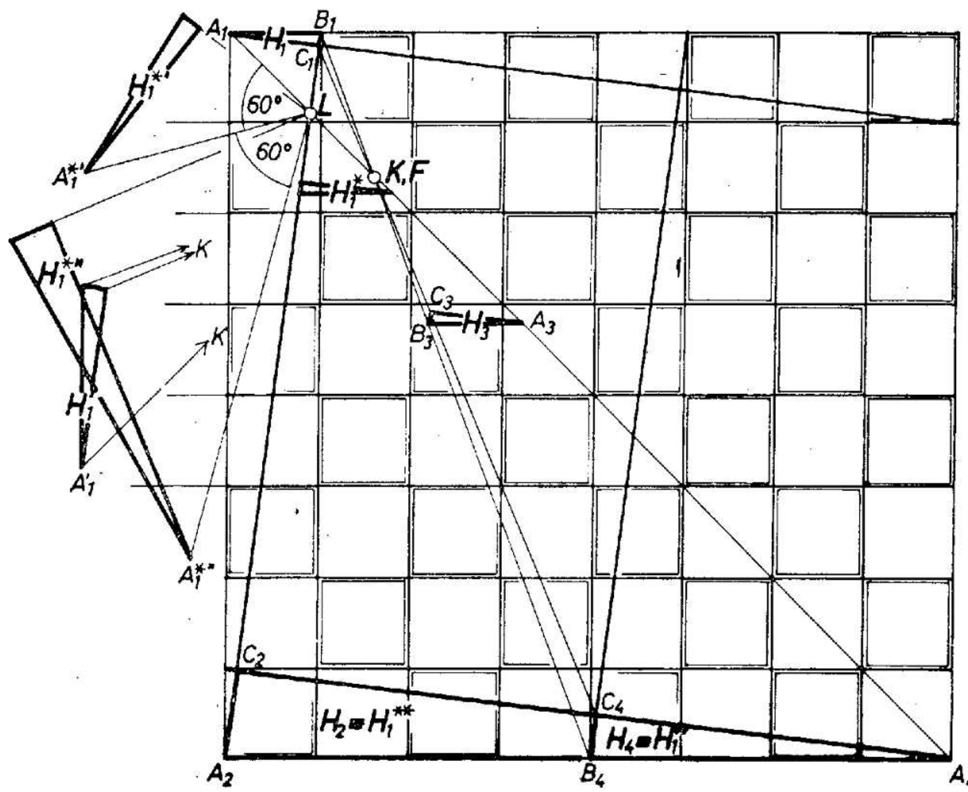
1. ábra

1. Először megmutatjuk, hogy minden forgatva nyújtásnál az elfordítás és a nyújtás sorrendje felcserélhető. Legyen az elfordítandó háromszög ABC, a forgatva nyújtás középpontja K, szöge φ, aránya λ (2. ábra). Ha először az $ABC = H$ háromszöget φ szöggel elforgatjuk, kapjuk H_1-et, majd ezt λ arányban nagyítva kapjuk H_2-t. Ha most H_1-et és H_2-t együtt visszaforgatjuk φ szöggel, H_1 H-ba, H_2 pedig valamilyen H_3-ba kerül. Mivel a forgatás aránytartó, ezért H-t K-ból λ arányban kinagyítva H_3-t fogjuk kapni. H_3-t pedig φ szöggel elforgatva H_2-be jutunk, ugyanoda, mint az előbb.



2. ábra

2. Most felhasználjuk, hogy az A_1A_4, B_1B_4 és C_1C_4 egyenesek egy ponton mennek keresztül. Legyen ez a pont K (3. ábra). K körül az $A_1B_1C_1 = H_1$ háromszöget 180°-kal elforgatva kerüljön a H_3 helyzetbe. Mivel a két eredeti (H_1 és H_4) háromszögben a megfelelő oldalak párhuzamosak, azért így lesz ez a H_3 és H_4 háromszögek esetében is, vagyis a két háromszög hasonló lesz. Másrészt a megfelelő csúcsokat összekötő egyenesek egymást K-ban metszik, azért K-ból a H_3 háromszöget megfelelő arányban kinagyítva éppen H_4-be jutunk. Ez az arány megegyezik a két háromszög hasonlósági arányával, vagyis 1 : 4-gyel.



3. ábra

3. A 2.-ben leírt forgatva nyújtást a következőképpen bontjuk két részre: *a)* K körül H_1-t $\varphi = 90°$-kal forgatjuk el, az arányossági tényező $\lambda = 2$. Így H_1'-t kapjuk. Ezt tovább forgatjuk 90°-kal, majd ezt is $\lambda = 2$ arányban nagyítjuk K-ból. Így eljutunk H_1''-höz. Ez azonos lesz H_4-gyel, ugyanis H_4-et összesen $90° + 90° = 180°$-kal forgattuk el, és $2 \cdot 2 = 4$-szeresére nyújtottuk. H_1' nyilván megszerkeszthető, 90°-kal elforgatni és kétszeresére nyújtani könnyen lehet.

Már csak az van hátra, hogy megmutassuk, az A_1A_4, B_1B_4 és C_1C_4 egyenesek egy ponton mennek át. Ehhez nyilván elegendő azt megmutatnunk, hogy B_1B_4 és C_1C_4 metszéspontja egyforma messze van a sakktábla széleitől. Legyen e két egyenes metszéspontja F. Az FB_1C_1 és FB_4C_4 háromszögek hasonlók, mivel oldalaik párhuzamosak. Hasonlóságuk aránya $1 : 4$, mert e két háromszög hasonlóságának aránya megegyezik a H_1 és H_4 háromszögek hasonlóságának arányával, hiszen egy–egy közös oldaluk van. Így a metszéspont B_1B_4-et $1 : 4$ arányban osztja, tehát távolsága A_1B_1-től $8/5$, A_1A_2-től $1 + 3/5 = 8/5$, e két távolság valóban egyenlő.

4. Állítjuk, hogy olyan hasonló háromszögpár, melyet egymásba átvivő forgatva nyújtás felbontható 3 kívánt forgatva nyújtásba, az $A_1B_1C_1 = H_1$, valamint az $A_2A_4C_2 = H_2$ háromszögek.

Legyen ugyanis A_1A_4 és B_1A_2 metszéspontja L. L körül 180°-kal elforgatva H_1-et H_1^*-ba jutunk Mivel H_1 és H_2 hasonlók voltak, hiszen megfelelő oldalaik párhuzamosak, H_1^* és H_2 is hasonlók lesznek, hasonlóságuk aránya $A_1B_1 : A_2A_4 = 1 : 8$, mivel itt a megfelelő csúcsokat összekötő egyenesek egy ponton mennek keresztül, L-ből történő $\lambda = 1 : 8$ arányú nagyítás H_1^*-t éppen H_2-be viszi. Ezt az elforgatást a következő háromra lehet felbontani: H_1-et L körül $\varphi = 60°$-kal elforgatjuk, majd $\lambda = 2$ arányban nagyítjuk. Ezt még kétszer megismételve kapjuk H_1^{**}-ot. Ez megegyezik H_2-vel, hiszen összesen $60° + 60° + 60° = 180°$-kal forgattunk el és $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$-szorosra nagyítottunk. A közbeeső háromszögek nyilván szerkeszthetők is.

Megjegyzések. 1. *Desargues* egyik tétele azt mondja, hogy ha két háromszög olyan helyzetű, hogy egy–egy szögpontját összekötő egyenesek egy ponton mennek át, akkor a megfelelő oldalak egy egyenesen metszik egymást és fordítva. (L Vigassy Lajos : Síkmértani szerkesztések térmértani megoldással. 66. ábra. Szakköri füzetek.) Példánkban a megfelelő oldalak párhuzamosak, tehát metszéspontjuk ideális pont. A három ideális pont a sík ideális egyenesén van, tehát a megfelelő csúcsokat összekötő egyenesek egy (K) ponton mennek át.

2. Ha adva van két egyező körüljárású hasonló háromszög, akkor mindig csak egy olyan forgatva nyújtás létezik (K, φ, λ), amellyel az egyik a másikba átvihető. De ez mindig létezik is. Legyen ugyanis a két háromszög egy–egy megfelelő oldala A_1B_1 és A_4B_4, az $\dfrac{A_4B_4}{A_1B_1} = \lambda = \dfrac{KA_4}{KA_1}$. Ez azt mondja, hogy a K pontok mértani helye egy Apollonius–féle kör. Továbbá A_1B_1 és A_4B_4 szöge nagyságra és *irányra* nézve megegyezik az A_1KA_4 szöggel. Az adott szög miatt a K pont másik mértani helye az A_1A_4 ponton átmenő *egyetlen* körív. A kör és a körív mindig metszi egymást, és csak egy pontban. (Vigassy Lajos: Geometriai transzformációk. 44. ábra. Szakköri füzetek).

3. Alkalmazzunk egy AB szakaszra egy K_1 pontból egy forgatva nyújtást, majd az így nyert eredményre egy K_2 pontból egy másik forgatva nyújtást. Bizonyítható, hogy azon forgatva nyújtás középpontja (K_3), amely az eredeti szakaszt a harmadik helyzetbe átviszi, mindig rajta van a K_1 és K_2 pontokat összekötő egyenesen. (Lásd uo. 42. ábra.)

Vigassy Lajos