I. Legyen a vízszintes rétegek száma Jóska elkészült téglatestjén $x-1$, Laci kockáján y ($x-1$, y természetes számok), akkor a Jóska elképzelt téglatestjében leendő (vagyis az összes) cukordarabok számának kétféle kifejezéséből

$$x(x+1)(x+2)=(x-1)\cdot x\cdot(x+1)+y^3,$$

$$3x(x+1)=y^3. \tag{1}$$

Itt a bal oldal osztható 3-mal, ezért y^3 is osztható vele. Ez csak úgy lehet, ha y is osztható 3-mal, így a jobb oldal osztható 27-tel, és a bal oldali $x(x+1)$ szorzat osztható 9-cel. Mivel ennek tényezői szomszédos természetes számok, azért relatív prímek, az oszthatóság csak úgy teljesülhet, ha vagy x vagy $x+1$ osztható 9-cel.

Ugyanezért x és $x+1$ további tényezője csak egy-egy egész szám köbe lehet, tehát

vagy α) $x=a^3$ és $x+1=9b^3$,

vagy β) $x=9c^3$ és $x+1=d^3$,

ahol a, b, c, d természetes szám (és így $y=3ab$, ill. $y=3cd$).

Az első esetben

$$x=a^3=9b^3-1, \tag{2}$$

és tüstént látjuk, hogy ezt kielégíti a legkisebb szóba jövő $b=1$ érték, $a=2$-vel együtt. Innen (1)-nek egy megoldása $x=8$ és $y=6$, eszerint Jóska $7\cdot8\cdot9=504$, Laci pedig $6^3=216$ db cukrot használt föl, és az utóbbiak átvétele után Jóska építménye $720=8\cdot9\cdot10$ kockát tartalmazott. Ez a válasz életszerű, mert a szokásos, 1 kg-os dobozban a darabok száma kb. $3-400$.

II. Belátjuk, hogy a feladatnak nincs más, elfogadható megoldása. Az α) esetet folytatva legyen $a=3q+r$, ahol r a -1, 0, 1 számok valamelyike. Ezt (2)-be helyettesítve, átrendezéssel

$$r^3+1=9(b^3-3q^3-3q^2r-qr^2),$$

osztható 9-cel. Ezért csak $r=-1$ lehetséges, a zárójel értéke 0. Ebből

$$q(3q^2-3q+1)=b^3.$$

A bal oldal tényezői relatív prímek, ezért q köbszám, és mivel a $q=1$ esetet már láttuk, $q\geq 8$. Így azonban $a=3q+r\geq 23>2\cdot10$, és $x=a^3>2^3\cdot10^3$, a két fiú által fölhasznált kockák N száma

$$N=x(x+1)(x+2)>x^3>2^9\cdot10^9>5\cdot10^{11}$$

volna, ami több, mint 10^9 kg cukrot jelentene.

A β) esetben

$$d^3=9c^3+1,$$

a fentiekhez hasonlóan d csak $3s+1$ alakú szám lehet, így

$$s(3s^2+3s+1)=c^3,$$

s is, $3s^2+3s+1$ is köbszám, $s=t^3$ és $d=3t^3+1$, ahol $t>1$, mert $t=1=s$ esetén a zárójelben $3+3+1=7$ nem köbszám. Így pedig ismét elfogadhatatlan alsó korlátot kapunk:

$$N>x^3=\left(d^3-1\right)^3=\left[\left(3t^3+1\right)^3-1\right]^3>\left(27t^9\right)^3>25^3t^{27}\geq$$
$$\geq 5^6\cdot2^{27}=2\cdot10^6\left(2^{10}\right)^2>2\cdot10^{12},$$

hiszen $2^{10}=1024>10^3$. Állításunkat bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Az $x=8$, $y=6$ megoldáshoz elvezet a következő meggondolás is. (1) bal oldala páros, emiatt y osztható $2\cdot3=6$-tal is. $y=6z$ helyettesítéssel (1)-nek x-re való pozitív megoldása

$$x=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+288z^3}\right),$$

és mindjárt látjuk, hogy a diszkrimináns $z=1$ esetén négyzetszám.