I. megoldás. I. Megmutatjuk, hogy előállíthatók olyan természetes számpárok, amelyek eleget tesznek a kívánt sorozat szomszédos tagjaira előírt követelménynek, továbbá hogy minden ilyen pár nagyobbik tagja egyenlő egy másik pár kisebbik tagjával. Ebből már következik, hogy egy megfelelő számpárból kiindulva úgy kapunk egy az előírást kielégítő, tetszés szerinti számú tagot tartalmazó számsorozatot, hogy nagyobbik számát a következő pár kisebbik tagjának vesszük, hozzá képezzük a nagyobbik tagot és ezt az eljárást ismételjük a tagok kívánt számának eléréséig.

Legyen a számpár nagyobbik és kisebbik tagjának különbsége d, kisebbik tagja a, így a másik tag $a+d$; eszerint d-nek is természetes számnak kell lennie. Az előírás szerint

$$a+(a+d)=d^2,$$

amiből

$$a=\frac{d^2-d}{2}=\frac{d(d-1)}{2}. \tag{1}$$

Ez a kifejezés mindig természetes számot ad, ha d-ként 1-nél nagyobb természetes számot választunk, hiszen d és az 1-gyel kisebb szomszédja közül az egyik szám páros, tehát szorzatuk osztható 2-vel; így persze a pár másik tagja is természetes szám. ($d=1$ esetén $a=0$ lenne.)

Ezzel azt is kaptuk, hogy végtelen sok olyan számpár képezhető, amely kielégíti a sorozat szomszédos tagjaira előírt követelményt. Pl. a $d=5$-ből képződő számpár két tagja $a=5\cdot 4/2=10$ és $a+d=15$.

Másrészt a tetszés szerinti d-ből képezett pár nagyobbik tagja (1) alapján

$$a+d=\frac{d^2+d}{2}=\frac{(d+1)d}{2}, \tag{2}$$

és ez valóban (1)-ből is kiadódik, ha d helyére $d+1$-et írunk. Eszerint: a d különbségű számpár nagyobbik tagja egyenlő a $d+1$ különbségű pár kisebbik tagjával. A példában kapott 15 kiadódik a $6\cdot 5/2$ alakból is.

Mindezek alapján a sorozat c_2 második tagja és c_1 első tagja közti d különbséget megválasztva ($d\geq 2$, természetes szám) c_1-et megadja (1), $c_2=c_1+d$, tovább pedig tagról tagra az 1-gyel nagyobb számot vesszük a szomszédos tagok különbségének. Pl. $d=5$-ből

$$c_1=10,\quad c_2=10+5=15,\quad c_3=15+6=21,\quad c_4=21+7=28,\quad \ldots$$

II. Megadható olyan képlet, amelynek alapján a sorozat tetszés szerinti n sorszámú tagja a megelőző tagok előállítása nélkül kiszámítható. Legegyszerűbb ez, ha c_2-c_1-ként a megengedett legkisebb $d=2$ értéket választjuk: (1) tényezőit fölcserélve:

$$c_1=\frac{1\cdot 2}{2}=1,\quad c_2=\frac{2\cdot 3}{2}=3,\quad \text{általában}\quad c_n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Ha pedig $c_2-c_1=d_1$, akkor

$$c_1=\frac{(d_1-1)d_1}{2},\quad c_2=\frac{d_1(d_1+1)}{2},\quad \text{általában}\quad c_n=\frac{(d_1+n-2)(d_1+n-1)}{2}.$$

Vargha Ágnes (Kisvárda, Császy L. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Legyen a sorozat két egymás utáni tagja u és v, ahol $v>u>0$, egész számok. Ekkor

$$u+v=(v-u)^2,$$

v szerint rendezve

$$v^2-(2u+1)v+(u^2-u)=0,$$

és az oldóképlettel

$$v=u+\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{8u+1}\right). \tag{3}$$

(A négyzetgyökjel előtt nem állhat mínuszjel a $v>u$ megállapodás miatt.)

Ez csak olyan u mellett lesz pozitív egész szám, amelyre $8u+1$ négyzetszám, éspedig nyilvánvalóan páratlan szám négyzete:

$$8u+1=(2k-1)^2, \tag{4}$$

ahol k egész szám. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy k pozitív, továbbá $u\geq 1$ miatt $k\geq 2$. Így (4)-ből, majd (3)-ból

$$u=\frac{(2k-1)^2-1}{8}=\frac{k(k-1)}{2},$$

$$v=u+k=\frac{k(k+1)}{2},$$

és ezek azonosak az I. megoldás (1), (2) eredményeivel.

Sailer Kornél (Ózd, József A. Gimn., II. o. t.)

III. megoldás. Legyenek a sorozat tagjai a_0, a_1, a_2, ... és legyen két egymás utáni tag különbsége $a_{i+1}-a_i = b_i (i=0,\,1,\,2,\,\ldots)$, a feltevés szerint ez is természetes szám. A feladat követelménye két szomszédos számpárra:

$$a_{i+1}+a_i=b_i^2, \tag{5}$$

$$a_{i+2}+a_{i+1}=b_{i+1}^2. \tag{6}$$

A bal oldalak különbsége

$$a_{i+2}-a_i=(a_{i+2}-a_{i+1})+(a_{i+1}-a_i)=b_{i+1}+b_i,$$

így (6) és (5) különbsége

$$b_{i+1}+b_i=b_{i+1}^2-b_i^2,$$

és mivel a bal oldal pozitív, egyszerűsíthetünk vele:

$$1=b_{i+1}-b_i,$$

vagyis a tagról tagra bekövetkező növekedés tagpárról tagpárra 1-gyel növekszik, számtani sorozatot alkot:

$$b_i=b_0+i. \tag{7}$$

Most már (5) alapján

$$(a_i+b_i)+a_i=b_i^2,$$

$$a_i=\frac{b_i^2-b_i}{2}=\frac{b_i(b_i-1)}{2}=\frac{(b_0+i)(b_0+i-1)}{2} \tag{8}$$

és $a_0>0$ miatt $b_0>1$.

Megfordítva, (8)-ból és (7)-ből következik (5), másrészt, hogy mint két szomszédos természetes szám szorzatának fele, természetes szám. Így a feladatnak eleget tevő sorozatokat első két tagjuk b_0 különbsége egyértelműen meghatározza.

(Tusnády Gábor)